ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

SÉRIE MATHÉMATIQUE

№ 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва ★ 1939

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

И. М. ВИНОГРАДОВ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОЦЕНКИ ОДНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

Автор приводит вывод оценки одной тригонометрической суммы с простыми числами и показывает возможность применения его метода к оценке других сумм.

В настоящей работе дается подробный вывод части результатов, краткое сообщение о которых было дано ранее [1]. Здесь, без помощи теории L-рядов, путем нового усовершенствования моего общего метода, я оцениваю сумму вида

$$\sum_{N-A<p\leqslant N}' e^{2\pi i \frac{a}{q} p}, \ (a, q)=1, \ q>0,$$

в случае, когда с возрастанием N число q растет весьма медленно.

Тот же метод легко обобщается и на случай, когда вместо p в показателе стоит многочлен степени $n>1$ с целыми коэффициентами, если общий наибольший делитель этих коэффициентов и q равен 1.

Обозначения. Буквою θ обозначаем число с условием $|\theta|\leqslant 1$.

Обозначения

$$A \ll B, B \gg A, \ A=O(B)$$

показывают, что

$$\frac{|A|}{|B|}\leqslant c,$$

где c вполне определяется величинами, принимаемыми при доказательстве за постоянные.

Чтобы показать, что постоянная c вполне определяется постоянными $c_1, \ldots, c_n$, пишем

$$c=c(c_1, \ldots, c_n).$$

Далее полагаем

$$\{z\}=z-[z], \ (z)=\min(\{z\}, \ 1-\{z\}).$$

---

[1] ДАН, т. XXII, № 2, 1939.

ЛЕММА 1. *Пусть h и h_1 произвольно большие постоянные > 1, ε произвольно малое положительное постоянное $< \frac{1}{2}$, $N > 2$, $r = \log N$,*

$$0 < q \leqslant r^h, \ 0 < q_1 \leqslant r^{h_1}, \ (q, q_1) = 1,$$
$$0 \leqslant l < q, \ (q, l) = 1,$$
$$A = NH^{-1}, \ 1 \leqslant H \leqslant e^{\sqrt{r}}, \ A \leqslant N' \leqslant N, \ p_0 = e^{r^{1-\varepsilon}},$$

D произведение всех простых $\leqslant p_0$ и не входящих в qq_1.

Тогда число T членов арифметической прогрессии $qx + l$, взаимно простых с D (и следовательно, с Dq) и заключенных в интервале

$$N' - A < qx + l \leqslant N',$$

удовлетворяет неравенству

$$T \ll \frac{Ar^{2\varepsilon}}{rq}.$$

Доказательство [2]. Достаточно считать $N > c$, где $c = c(h, h_1, \varepsilon)$ достаточно велико. Пусть ρ обозначает число простых делителей числа D; $p_1, \ldots, p_\rho$ эти простые делители,

$$m = 2[3 \log r - 1],$$

$\Omega(d)$ обозначает число различных простых делителей числа d. Имеем

$$T < \sum_{\substack{d/D \\ \Omega(d) < m}} \mu(d)\left(\frac{A}{qd} + \theta_d\right).$$

Отсюда находим

$$T < \sum_{\substack{d/D \\ \Omega(d) < m}} \mu(d)\frac{A}{qd} + \sum_{h=0}^{m-1} \binom{\rho}{h}.$$

Но здесь имеем

$$\sum_{d/D} \mu(d)\frac{A}{qd} = \frac{A}{q}\,\frac{\prod\limits_{p \leqslant p_0}\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod\limits_{p/qq_1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \ll \frac{Ar^{2\varepsilon}}{rq}.$$

Далее находим

$$\left|\sum_{\substack{d/D \\ m \leqslant \Omega(d) \leqslant \rho}} \mu(d)\frac{A}{qd}\right| < \frac{A}{q} \sum_{\substack{d/D \\ m \leqslant \Omega(d) \leqslant \rho}} \frac{1}{d} < \frac{A}{q}\sum_{n=m}^{\rho} S_n,$$

где S_n обозначает n-ую элементарную симметрическую функцию от

$$\frac{1}{p_1}, \ldots, \frac{1}{p_\rho}.$$

---

[2] Brun V., Videnskapsselskapets Skrifter. I, Mat.-naturv. Klasse, 1920, № 3, Kristiania.

Titchmarsh E. C., Rend. del circ. mat. di Palermo, t. LIV, 1930, 414—439.

Landau E., Vorl. über Zahlentheorie, 1927, Bd. I, II Teil, Kap. 2.

При этом легко видеть, что

$$\frac{A}{q}\sum_{n=m}^{\rho} S_n < \frac{A}{q}\sum_{n=m}^{\rho}\frac{S_1^n}{n!} < \frac{A}{q}\sum_{n=m}^{\rho}\left(\frac{eS_1}{n}\right)^n \ll \frac{A}{q}\sum_{n=m}^{\rho}\left(\frac{4\log r}{m}\right)^n \ll \frac{A}{q}\left(\frac{4}{5}\right)^{6\log r} \ll \frac{A}{rq}.$$

Наконец,

$$\sum_{h=0}^{m-1}\binom{\rho}{h} < \sum_{h=0}^{m-1}\rho^h < p_0^m < \frac{A}{rq}\frac{rq}{A}e^{6r^{1-\varepsilon}\log r} \ll \frac{A}{rq},$$

что и доказывает нашу лемму.

ЛЕММА 2. *Пусть q целое > 1, $(a, q) = 1$ и l и l_1 независимо друг от друга пробегают значения, взятые из чисел*

$$0, \ldots, q-1,$$

причем каждому из этих чисел l может равняться не более M раз, а l_1 может равняться не более M_1 раз.

Тогда для суммы

$$S = \sum_l \sum_{l_1} e^{2\pi i \frac{a}{q} l l_1}$$

имеем неравенство

$$|S| < M M_1 q \sqrt{q}.$$

Доказательство. Имеем

$$|S|^2 \leqslant qM \sum_l \left|\sum_{l_1} e^{2\pi i \frac{a}{q} l l_1}\right|^2 \leqslant qM^2 \sum_{x=0}^{q-1}\left|\sum e^{2\pi i \frac{a}{q} x l_1}\right|^2 \leqslant qM^2 \sum_{l_1}\sum_{l_1'}\sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q}(l_1 - l_1')x}$$

Но суммирование по x дает q в случае $l_1 = l_1'$ и дает нуль в противном случае. Поэтому

$$|S|^2 \leqslant M^2 M_1^2 q^3,$$

что и доказывает лемму 2.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть h произвольно большое постоянное > 1, а δ и η произвольно малые положительные постоянные,*

$$\delta \leqslant 2,\ \eta \leqslant \frac{1}{16},\ N > 2,\ r = \log N,$$

$$A = NH^{-1},\ 1 \leqslant H \leqslant H_1 = e^{r^{\delta\eta}},\ A \leqslant N' \leqslant N,$$

$$(a, q) = 1,\ r^{\delta} < q \leqslant r^h,$$

p пробегает простые числа.

Тогда для суммы

$$S = \sum_{N'-A<p\leqslant N'} e^{2\pi i \frac{a}{q} p}$$

имеем неравенство

$$S \ll \frac{A}{r} q^{4\eta - \frac{1}{2}}.$$

Доказательство. 1° Пусть

$$p_0 = e^{r^{1-1.1\delta\eta}}$$

и D обозначает произведение всех простых чисел $\leqslant p_0$. Пусть d пробегает все делители числа D, а P пробегает все числа, взаимно простые с D. Тогда имеем

$$\sum_{N'-A<P\leqslant N'} e^{2\pi i \frac{a}{q} P} = \sum_{d} \mu(d) S_d, \quad S_d = \sum_{\frac{N'-A}{d}<m\leqslant \frac{N'}{d}} e^{2\pi i \frac{a}{q} dm}. \tag{1}$$

2° В левой части отбрасываем все члены, где P делится на квадрат целого >1. Ошибка, которая произойдет от такого отбрасывания, будет

$$\ll \sum_{p_0<p\leqslant \sqrt{N}} \frac{N}{p^2} \ll \frac{N}{p_0} \ll \frac{A}{rq}.$$

3° Теперь оценим ошибку Δ, которая получится, если в правой части равенства (1) отбросим члены, отвечающие значениям

$$d > N_1 = N' H_1^{-2},$$

не делящимся на q. Пусть такое d имеет k простых делителей. Находим

$$p_0^k > N_1, \quad k > \frac{r - 3r^{\delta\eta}}{r^{1-1.1\delta\eta}} > r^{1.1\delta\eta} - 1.$$

Если теперь $N_1 < N_2 \leqslant N'$ и W обозначает число значений d, лежащих в интервале

$$N_1 < d \leqslant N_2,$$

то из

$$\tau(1) + \ldots + \tau([N_2]) \leqslant N_2 (r+1)$$

выводим

$$W 2^{r^{1.1\delta\eta}-1} \leqslant N_2 (r+1); \quad W \ll N_2 Z, \quad Z = r 2^{-r^{1.1\delta\eta}}.$$

После этого находим

$$\Delta < \sum_{N_1<d\leqslant N'} \sum_{\frac{N'-A}{d}<m\leqslant \frac{N'}{d}} 1 \ll \sum_{m=1}^{H_1^2} \sum_{N_1<d\leqslant \frac{N'}{m}} 1 \ll \sum_{m=1}^{H_1^2} \frac{N'}{m} Z \ll N' Z r^{\delta\eta} \ll$$
$$\ll N' r 2^{-r^{1.1\delta\eta}} \ll \frac{A}{rq}.$$

4° В виду всего доказанного равенство (1) принимает вид

$$\sum_{N'-A<Q\leqslant N'} e^{2\pi i \frac{a}{q} Q} = \sum_{d}{}' \mu(d) S_d + O\left(\frac{A}{rq}\right), \quad S_d = \sum_{\frac{N'-A}{d}<m\leqslant \frac{N'}{d}} e^{2\pi i \frac{a}{q} dm}. \tag{2}$$

Здесь в левой части Q пробегает лишь числа, не делящиеся на квадрат целого >1 и взаимно простые с D. В правой же части d пробегает все значения $\leqslant N_1$, не делящиеся на q, и все значения $\leqslant N'$, кратные q.

5° Оценим часть V суммы, стоящей в равенстве (2) справа, отвечающую значениям d, кратным q. Имеем

$$V = \mu(q) \sum_{0<d_1\leqslant \frac{N'}{q}} \mu(d_1) S'_{d_1}, \quad S'_{d_1} = \sum_{\frac{N'-A}{qd_1}<m\leqslant \frac{N'}{qd_1}} 1,$$

где d_1 пробегает значения d, взаимно простые с q. Но множитель при $\mu(q)$ представляет собою число чисел z с условием

$$\frac{N'}{q}-\frac{A}{q}<z\leqslant\frac{N'}{q},$$

взаимно простых с произведением D_1 всех, не входящих в q простых $\leqslant p_0$. Здесь применим лемму 1, взяв

$$1.1\delta\eta;\ \frac{N'}{q},\ \frac{A}{q},\ 1,\ q,\ h$$

вместо

$$\varepsilon;\ N',\ A,\ q,\ q_1,\ h_1.$$

Тогда окажется

$$V\ll\frac{Ar^{2.2\delta\eta}}{rq}.$$

6° Наконец, рассмотрим часть Y суммы, стоящей в равенстве (2) справа, отвечающую значениям d, не делящимся на q. Здесь имеем

$$S_d\ll q.$$

Поэтому

$$Y\ll\sum_{d\leqslant N_1}q\leqslant N_1q\ll NH_1^{-2}q\ll\frac{A}{rq}.$$

Собирая все доказанное, из равенства (2) выводим

$$\sum_{N'-A<Q\leqslant N'}e^{2\pi i\frac{a}{q}Q}\ll\frac{Ar^{2.2\delta\eta}}{rq}. \tag{3}$$

7° В левой части неравенства (3) число k простых $\leqslant\sqrt{N}$ делителей каждого Q не превосходит

$$g=\left[\frac{r}{\log p_0}\right]=[r^{1.1\delta\eta}].$$

Равенство $k=0$ будем иметь в случае, когда Q простое, удовлетворяющее условиям

$$Q>\sqrt{N},\ N'-A<Q\leqslant N',$$

или же в случае (при $N'=A$)

$$Q=1.$$

Сумму членов левой части неравенства (3), отвечающих данному k, обозначим символом T_k. Тогда

$$T_0=S+O(\sqrt{N})$$

и из неравенства (3) выводим

$$S+\sum_{k=1}^{g}T_k+O\left(\frac{Ar^{2.2\delta\eta}}{rq}\right). \tag{4}$$

8° Сначала оценим сумму

$$T_{k0}=\sum_u\sum_v e^{2\pi i\frac{a}{q}uv},\quad k\geqslant 1,$$

где u пробегает простые числа с условием

$$p_0 < u \leqslant \sqrt{N}$$

и v, при данном u, пробегает числа Q интервала

$$\frac{N'-A}{u} < v \leqslant \frac{N'}{u},$$

не делящиеся на квадрат целого >1 и содержащие ровно $k-1$ простых сомножителей $>p_0$ и $\leqslant\sqrt{N}$.

Весь интервал

$$p_0 < u \leqslant \sqrt{N}$$

мы разобьем на $\ll r$ интервалов вида

$$U < u \leqslant U',\ 2U \leqslant U' \leqslant 4U,$$

причем, полагая

$$H_0 = e^{r^{1.15\eta}},$$

мы каждый из новых интервалов снова разбиваем на $\ll H_0$ более мелких интервалов вида

$$u_0 < u \leqslant u_1,\ UH_0^{-1} < u_1 - u_0 \leqslant 2UH_0^{-1}.$$

Пусть

$$\Omega = \sum_{u_0<u\leqslant u_1}\ \sum_{\frac{N'-A}{u}<v\leqslant\frac{N'}{a}} e^{2\pi i\frac{a}{q}uv}.$$

Имеем

$$\frac{N'-A}{u}=\frac{N'-A}{u_0}+O\left(\frac{N'}{u}H_0^{-1}\right),\ \frac{N'}{u}=\frac{N'}{u_0}+O\left(\frac{N'}{u}H_0^{-1}\right).$$

Поэтому сумма Ω будет отличаться от суммы

$$\Omega' = \sum_{u_0<u\leqslant u_1}\ \sum_{\frac{N'-A}{u_0}<v\leqslant\frac{N'}{u_0}} e^{2\pi i\frac{a}{q}uv}$$

на величину порядка

$$\frac{N'}{U}H_0^{-1}UH_0^{-1}=N'H_0^{-2}.$$

Сумма всех таких ошибок для всех Ω, на которые разбивается T_{k0}, будет

$$\ll N'H_0^{-2}H_0 r \ll \frac{A}{rq}.$$

9° Пусть l какое-либо из чисел

$$l=0,\ldots,q-1;\ (l,q)=1.$$

Применяя лемму 1, оценим число B чисел u вида $qx+l$, заключенных в интервале

$$u_0 < u \leqslant u_1.$$

Здесь вместо

$$\varepsilon;\ N,\ N',\ A,\ r,\ q_1,\ h$$

следует взять

$$0.1\delta\eta;\ u_1,\ u_1,\ u_1-u_0,\ \log u_1,\ 1,\ 2h.$$

Тогда окажется

$$B \ll \frac{(u_1-u_0)\, r^{0.2\delta\eta}}{r^{1-1.1\delta\eta} q} \ll M, \quad M = \frac{UH_0^{-1} r^{1.3\delta\eta}}{rq}.$$

Аналогичным образом, если l_1 какое-либо из чисел

$$l_1 = 0, \ldots, q-1;\ (l_1, q) = 1,$$

оценим и число B_1 чисел v вида $qx+l_1$, заключенных в интервале

$$\frac{N'-A}{u_0} < v \leqslant \frac{N'}{u_0}.$$

Здесь вместо

$$\varepsilon;\ N,\ N',\ A,\ r,\ q_1,\ h$$

следует взять

$$1.2\delta\eta;\ \frac{N'}{u_0},\ \frac{N'}{u_0},\ \frac{A}{u_0},\ \log\frac{N'}{u_0},\ 1,\ 2h.$$

Тогда окажется

$$B_1 \ll M_1,\ M_1 = \frac{Ar^{2.4\delta\eta}}{Urq}.$$

Таким образом Ω' может быть представлено в форме

$$\Omega' = \sum_s \sum_{s_1} e^{2\pi i \frac{a}{q} s s_1},$$

где s и s_1 независимо друг от друга пробегают значения, выбранные среди чисел

$$0, \ldots, q-1,$$

причем каждому из этих чисел s может равняться $\leqslant M$ раз, а s_1 может равняться $\leqslant M_1$ раз. Поэтому, согласно лемме 2, имеем

$$|\Omega'| \leqslant MM_1 q\sqrt{q} < \frac{AH_0^{-1} r^{3.7\delta\eta}}{r^2} q^{-\frac{1}{2}}.$$

Вместе с тем находим

$$T_{k0} \ll \frac{Ar^{3.7\delta\eta}}{r} q^{-\frac{1}{2}}.$$

10° Очевидно, всякое слагаемое

$$e^{2\pi i \frac{a}{q} Q}$$

суммы T_k входит и в T_{k0}, причем ровно k раз. Кроме того, сумма T_{k0} может содержать еще члены вида

$$e^{2\pi i \frac{a}{q} u^2 v_1}.$$

Но число таких членов будет

$$\ll \sum_{p_0 < u \leqslant \sqrt{N}} \left(\frac{A}{u^2} + 1\right) \ll \frac{A}{p_0}.$$

Поэтому

$$T_k = \frac{1}{k} T_{k0} + O\left(\frac{1}{k} \frac{A}{p_0}\right) \ll \frac{Ar^{3.7\delta\eta}}{kr} q^{-\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{g} T_k \ll \frac{Ar^{4\delta\eta}}{r} q^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда и из (4) теорема 1 следует непосредственно.

Более точные оценки в случаях, рассматривавшихся ранее

То же видоизменение моего метода, но уже без применения метода V. Brun'а, позволяет получить более точные оценки для сумм

$$\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i f(p)}$$

и в некоторых случаях, разобранных мною раньше [3]. Здесь я поясню общий метод на частном примере.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $N > 2$, $r = \log N$,

$$S = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p}, \ \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \ (a, q) = 1, \ -1 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

$$0 < q \leqslant N, \ Q = \min\left(q, \frac{N}{q}\right), \ p_0 = e^{\sqrt{r}}, \ Q \leqslant p_0,$$

p пробегает простые числа.

Тогда имеем

$$S \ll Nr^2 Q^{-\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. 1° Имеем

$$\sum_{P \leqslant N} e^{2\pi i \alpha P} = \sum_{d} \mu(d) S_d + O\left(\frac{N}{p_0}\right), \ S_d = \sum e^{2\pi i \alpha d m}. \tag{5}$$

Здесь P пробегает положительные целые числа, не делящиеся на квадрат целого > 1 и взаимно простые с произведением D всех простых $\leqslant p_0$. В правой части d пробегает все делители числа D.

---

[3] Известия Академии Наук СССР, Серия матем., 1938, № 4, стр. 399—416.

2° Теперь рассмотрим значения d с условием

$$d \geqslant N_1,\ N_1 = Np_0^{-1}.$$

Пусть k число простых делителей такого d. Имеем

$$p_0^k \geqslant Np_0^{-1},\ k \geqslant \sqrt{r} - 1.$$

Если теперь N_2 любое число с условием

$$N_1 \leqslant N_2 \leqslant N,$$

то из

$$\tau(1) + \ldots + \tau([N_2]) \leqslant N_2(r+1)$$

для числа W чисел d с условием

$$N_1 < d \leqslant N_2$$

получим неравенство

$$W2^{\sqrt{r}-1} \ll N_2 r,\ W \ll N_2 r 2^{-\sqrt{r}}$$

Сумма членов правой части равенства (5), отвечающих случаю $d \geqslant N_1$, будет

$$\sum_{N_1<d\leqslant N} \sum_{0<m\leqslant\frac{N}{d}} 1 \ll \sum_{0<m\leqslant p_0} \sum_{N_1<d\leqslant\frac{N}{m}} 1 \ll \sum_{0<m\leqslant p_0} \frac{N}{m} r 2^{-\sqrt{r}} \ll \frac{N}{\sqrt{p_0}}.$$

3° Далее оценим сумму G членов правой части равенства (5), отвечающих случаю $d \leqslant N_1$. Находим

$$G \ll \sum_{0<d\leqslant N_1} \min\left(\frac{N}{d},\ \frac{1}{2(\alpha d)}\right).$$

Отсюда, рассуждая, как и в главе IX моей книги «Новый метод в аналитической теории чисел» [4], легко найдем

$$G \ll qr + \frac{N}{q} r + N_1 r \ll \left(q + \frac{N}{q}\right) r.$$

4° После доказанного в 2° и 3°, из равенства (5) выводим

$$\sum_{P\leqslant N} e^{2\pi i\alpha P} \ll \frac{N}{\sqrt{p_0}} + \left(q + \frac{N}{q}\right) r. \qquad (6)$$

[4] Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. X, 1937.

Здесь каждое P имеет

$$\leqslant g=[\sqrt{r}]$$

простых сомножителей. Обозначая символом T_k сумму членов левой части неравенства (6), отвечающих тем значениям P, которые имеют ровно k простых сомножителей $\leqslant\sqrt{N}$, имеем

$$T_0=S+O(\sqrt{N})$$

и таким образом неравенство (6) дает

$$S+\sum_{k=1}^{g}T_k\ll\frac{N}{\sqrt{p_0}}+\left(q+\frac{N}{q}\right)r. \tag{7}$$

5° Чтобы оценить T_k, $k\geqslant 1$, рассмотрим сначала сумму

$$T_{k0}=\sum_u\sum_v e^{2\pi i\alpha uv},$$

где u пробегает все простые числа с условием

$$p_0<u\leqslant\sqrt{N},$$

и v, при каждом данном u, пробегает числа P с условием

$$0<v\leqslant\frac{N}{u},$$

имеющие ровно $k-1$ простых сомножителей $\leqslant\sqrt{N}$.

Применяя лемму 12 гл. I указанной выше моей книги[4], получим

$$T_{k0}\ll N\sqrt{\frac{r}{p_0}+\frac{\sqrt{N}}{N}+\frac{qr^3}{N}+\frac{r^2}{q}}\ll Nr^{\frac{3}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

6° Каждый член суммы T_k входит и в T_{k0} и именно k раз. Кроме того, в T_{k0} могут входить еще члены вида

$$e^{2\pi i\alpha u^2 v_1}.$$

Но число таких членов будет

$$\ll\sum_{p_0<u\leqslant\sqrt{N}}\frac{N}{u^2}\ll\frac{N}{p_0}.$$

Таким образом имеем, в виду (8),

$$T_k\ll\frac{1}{k}Nr^{\frac{3}{2}}Q^{-\frac{1}{2}}+\frac{N}{kp_0},\quad\sum_{k=1}^{g}T_k\ll Nr^2Q^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда и из (7) теорема 2 следует непосредственно.

Замечание. Воспользуемся случаем сделать здесь следующее замечание. В моей работе «Улучшение оценки одной тригонометрической суммы, содержащей простые числа» [5], выведена оценка суммы S, дающая хорошие результаты и для главного случая

$$Q > p_0.$$

Следует, однако, отметить, что и эту оценку можно улучшить, причем предельным по точности результатом, который еще можно надеяться получить без существенных изменений метода, повидимому, является следующий:

$$S \ll NQ^{\varepsilon-\frac{1}{2}},$$

где ε — произвольно малое положительное постоянное. Однако такое улучшение оценки уже не требует добавлений к моему методу, указанных в настоящей работе.

Другие результаты. Нетрудно видеть, что изложенные добавления к моему методу полезны и при выводе оценок других сумм с простыми числами. Например легко получается следующий результат:

ТЕОРЕМА 3. *Пусть δ и η произвольно малые положительные постоянные < 1, h произвольно большое постоянное > 1, $N > 2$, $r = \log N$, q простое, $r^\delta < q \leqslant r^h$, k целое, не делящееся на q, $\left(\frac{a}{q}\right)$ символ Лежандра или нуль, в зависимости от того, будет ли $(a, q) = 1$, или же $(a, q) = q$, p пробегает простые числа.*

Тогда имеем

$$\sum_{p \leqslant N} \left(\frac{p+k}{q}\right) \ll \frac{N}{r} q^{\eta-\frac{1}{2}}.$$

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
8. I. 1939.

I. VINOGRADOW. ELEMENTARY ESTIMATIONS OF A CERTAIN TRIGONOMETRICAL SUM WITH PRIMES

SUMMARY

The author gives, by improvement of his general method without application of the theory of L-series, a complete proof of the following theorem published earlier (C. R. de l'Acad. des Sciences de l'URSS, v. XXII, № 2, 1939).

THEOREM. *Let h be an arbitrary large constant > 1, δ and η arbitrary small positive constants,*

[5] Известия Академии Наук СССР, Серия матем., 1938, № 1. стр. 15—24.

$$\delta \leqslant 2,\ \eta \leqslant \frac{1}{16},\ N > 2,\ r = \log N,$$
$$A = NH^{-1},\ 1 \leqslant H \leqslant H_1 = e^{r^{\delta\eta}},\ A \leqslant N' \leqslant N,$$
$$(a, q) = 1,\ r^{\delta} < q \leqslant r^{h},$$

p runs over primes. Then we have

$$\sum_{N'-A<p\leqslant N'} e^{2\pi i \frac{a}{q} p} < c\,\frac{A}{r}\, q^{4\eta - \frac{1}{2}},$$

where c depends only on h, δ and η.

An analogous estimation may be obtained for the sum

$$\sum_{p\leqslant N} \left(\frac{p+k}{q}\right).$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathematique

П. Е. ДЮБЮК

О НОРМАЛИЗАТОРЕ ЭЛЕМЕНТА В КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ *

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

В статье доказывается ряд теорем о нормализаторе элемента в конечной группе и дается приложение этих теорем к выводу новых критериев непростоты группы.

§ 1. Предварительные замечания

В настоящей работе доказываются некоторые теоремы о нормализаторе элемента в конечной группе и устанавливается ряд новых критериев непростоты группы. При выводе теорем мы будем пользоваться аппаратом теории квазинормализаторов, построенной В. К. Туркиным.

Приведем некоторые основные положения этой теории, необходимые для понимания дальнейшего изложения.

1. Определение квазинормализатора (1). Пусть A есть элемент порядка p^k (p — простое число) конечной группы $\mathfrak{G}$. Мы называем i-ым квазинормализатором элемента A и обозначаем через $\mathfrak{N}_A^{(i)}$ совокупность элементов X группы $\mathfrak{G}$, для которых выполняется условие

$$XAX^{-1}=X^m \quad m\equiv 1 \pmod{p^i} \quad (i\leqslant k).$$

Совокупность $\mathfrak{N}_A^{(i)}$ есть группа, являющаяся подгруппой группы $\mathfrak{G}$. Легко видеть, что если $\mathfrak{N}_A^{(i)} \neq \mathfrak{N}_A^{(i+\lambda)}$, то $\mathfrak{N}_A^{(i+\lambda)}$ есть инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{N}_A^{(i)}$.

2. Основная теорема (1). Пусть A есть элемент порядка p^k (p — простое число) некоторой группы. Если $\mathfrak{N}_A^{(\lambda)} \neq \mathfrak{N}_A^{(\lambda+1)}$, то $\mathfrak{N}_A^{(\lambda+2)}$ есть подгруппа индекса p группы $\mathfrak{N}_A^{(\lambda+1)}$. Исключение может иметь место лишь в случае $p=2$, $\lambda=1$.

3. Таблица квазинормализаторов (2). Если дан элемент A порядка p^k (p — нечетное простое число), принадлежащий некоторой

---

* Предварительное сообщение о настоящей работе опубликовано в Докладах Академии Наук СССР, т. XXII, в. 3 (1939).

группе $\mathfrak{G}$, то можно построить для него следующую таблицу квазинормализаторов:

$$
\begin{array}{l}
\underline{\mathfrak{N}_A^{(1)}, \quad \mathfrak{N}_A^{(2)}, \quad \mathfrak{N}_A^{(3)}, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{N}_A^{(\lambda_0)},} \quad \mathfrak{N}_A^{(\lambda_0+1)}, \ldots, \mathfrak{N}_A^{(k-1)}, \mathfrak{N}_A^{(k)} \\
\underline{\mathfrak{N}_{A^p}^{(1)}, \quad \mathfrak{N}_{A^p}^{(2)}, \quad \mathfrak{N}_{A^p}^{(3)}, \quad \ldots, \mathfrak{N}_{A^p}^{(\lambda_1)},} \quad \mathfrak{N}_{A^p}^{(\lambda_1+1)}, \ldots\ldots, \mathfrak{N}_{A^p}^{(k-1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\underline{\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(1)}, \quad \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(2)}, \quad \ldots, \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(\lambda_i)},} \quad \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(\lambda_i+1)}, \ldots, \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-1)} \\
\underline{\mathfrak{N}_{A^{p^{i+1}}}^{(1)}, \quad \ldots, \mathfrak{N}_{A^{p^{i+1}}}^{(\lambda_{i+1})},} \mathfrak{N}_{A^{p^{i+1}}}^{(\lambda_i)}, \ldots, \mathfrak{N}_{A^{p^{i+1}}}^{(k-i-1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{N}_{A^{p^{k-2}}}^{(1)}, \mathfrak{N}_{A^{p^{k-2}}}^{(2)} \\
\mathfrak{N}_{A^{p^{k-1}}}^{(1)}
\end{array}
\qquad (1)
$$

Горизонтальными линиями подчеркнуты равные между собой квазинормализаторы. Через λ_i обозначается наибольшее значение λ, при котором имеет место равенство

$$\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(1)} = \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(\lambda)} \qquad (i \leqslant k-1).$$

Для всех возможных значений i $\lambda_{i+1} \leqslant \lambda_i$.

Квазинормализаторы $\mathfrak{N}_A^{(k)}$, $\mathfrak{N}_{A^p}^{(k-1)}, \ldots, \mathfrak{N}_{A^{p^{k-1}}}^{(1)}$ представляют собою обычные нормализаторы элементов (соответственно)

$$A, A^p, A^{p^2}, \ldots, A^{p^{k-1}}.$$

При любых значениях j и r, при которых символы $\mathfrak{N}_{A^{p^r}}^{(j)}$ и $\mathfrak{N}_{A^{p^{r+1}}}^{(j)}$ имеют смысл, существует отношение

$$\mathfrak{N}_{A^{p^r}}^{(j)} \subseteq \mathfrak{N}_{A^{p^{r+1}}}^{(j)}.$$

Если $p=2$, то таблица квазинормализаторов (построенная для элемента A порядка 2^k) не обладает всеми свойствами таблицы (1). Однако, если существует равенство $\mathfrak{N}_{A^{2^{k-2}}}^{(1)} = \mathfrak{N}_{A^{2^{k-2}}}^{(2)}$, то таблица, построенная для случая $p=2$, не будет отличаться по своим свойствам от таблицы (1) ([3]).

Помимо основных положений теории квазинормализаторов, нам придется, при выводе критериев непростоты группы, использовать следующие две теоремы, доказанные в работе В. К. Туркина и П. Е. Дюбюка «О строении простых групп» (предварительное сообщение об этой работе опубликовано в 1938 г. ([4])).

Теорема А. Пусть $\mathfrak{P}$ — абелева подгруппа порядка p^α некоторой группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^\alpha n$ (p — нечетное простое число, n не делится на p).

Пусть A — элемент подгруппы $\mathfrak{P}$ порядка p^k, причем всякий элемент $\mathfrak{P}$, сопряженный с A^z, равен A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$. Если порядок нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$ не делится на $p^{\alpha+k}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n.

Теорема В. Пусть $\mathfrak{P}$ — абелева подгруппа порядка 2^α некоторой группы $\mathfrak{G}$ порядка $2^\beta n$ (n — нечетное). Пусть A — элемент подгруппы $\mathfrak{P}$ порядка 2^k, причем всякий элемент группы $\mathfrak{P}$, сопряженный со степенью A, будет снова степенью A. Если элемент $A^{2^{k-2}}$ не сопряжен со своим обратным элементом и порядок нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$ не делится на $2^{k+\alpha}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, кратного n.

Наряду с некоторыми новыми методами в настоящей работе будут применяться также приемы, использованные уже в только что цитированной статье.

§ 2. Теоремы о нормализаторе элемента

Докажем сначала одно предложение общего характера, которое будет заключать в себе как частные случаи и следствие ряд последующих теорем. Это общее предложение должно быть формулировано в терминах теории квазинормализаторов.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Если каждый элемент $(k-i-1)$-го квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$ элемента A^{p^i} $(i < k)$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A^{p^i} не делится на p^2.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\lambda_i \neq k-i$ и выведем такую вспомогательную теорему:

ЛЕММА. *Если имеют место условия теоремы 1 и, сверх того, $\lambda_i \neq k-i$, то отношение порядков квазинормализаторов $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$ и $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ сравнимо с единицей по модулю p^{i+1}.*

Для доказательства леммы рассмотрим прежде всего разложение квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$ по модулю $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$:

$$\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}} = \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_2 + \ldots + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_\varphi. \tag{2}$$

Пусть

$$N_r A^{p^i} N_r^{-1} = A^{u_r p^i},$$

где N_r — один из вычетов в разложении (2). Если N_s какой-нибудь другой вычет того же разложения и

$$N_s A^{p^i} N_s^{-1} = A^{u_s p^i},$$

то

$$u_r \not\equiv u_s \pmod{p^{k-i-1}}.$$

Действительно, из $u_r \equiv u_s \pmod{p^{k-i-1}}$ следует, что

$$N_r A^{p^i} N_r^{-1} = A^{u_r p^i} = A^{(u_s + \alpha p^{k-i-1}) p^i} = A^{u_s p^i} A^{\alpha p^{k-1}} = \\ = N_s A^{p^i} N_s^{-1} A^{\alpha p^{k-1}} = N_s A^{p^i + \alpha p^{k-1}} N_s^{-1},$$

или

$$N_s^{-1} N_r A^{p^i} N_r^{-1} N_s = A^{p^i (1 + \alpha p^{k-i-1})},$$

что противоречит смыслу разложения (2).

Рассмотрим теперь разложение квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ по модулю $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$:

$$\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}} = \mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}} + \mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}} N_2' + \ldots + \mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}} N_v'. \tag{3}$$

В работе В. К. Туркина «Квазинормализаторы и мономиальные представления» ([2]) показано, что вычеты N_i' этого разложения можно подобрать так, чтобы все они были перестановочны с $A^{p^{i+1}}$. Разложение группы $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ по модулю $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$ можно теперь представить в виде

$$\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}} = (\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_2 + \ldots + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_\varphi) + \\ + (\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_2 + \ldots + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_\varphi) N_2' + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_2 + \ldots + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_\varphi) N_v'. \tag{4}$$

Таким образом в качестве смежных систем разложения (4) мы можем рассматривать системы

$$\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_i N_j' \quad (i = 1, 2, \ldots, \varphi;\ j = 1, 2, \ldots, v), \tag{5}$$

а в качестве вычетов элементы $N_i N_j'$ $(i = 1, 2, \ldots, \varphi;\ \ j = 1, 2, \ldots, v)$. Возьмем произвольный вычет $N_i N_t'$ при условии, однако, что $t \neq 1$, и покажем, что элементы

$$N_r N_t', N_r N_t' A, \ldots, N_r N_t' A^{p^{i+1}-1} \tag{6}$$

принадлежат различным смежным системам (5). В самом деле, равенство вида

$$N_r N_t' A^x = P N_r N_t' \quad (x < p^{i+1}),$$

где P — элемент группы $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$, было бы, в силу условия теоремы, эквивалентно

$$N_r N_t' A^x = A^{mx} N_r N_t'; \quad m \equiv 1 \pmod p,$$

или

$$N_t' A^x N_t'^{-1} = N_r^{-1} A^{mx} N_r,$$

откуда

$$N_t' A^{p^i} N_t'^{-1} = N_r^{-1} A^{mp^i} N_r = A^{zp^i}; \quad z \equiv 1 \pmod p).$$

Таким образом элемент N_t' оказывается принадлежащим квазинормализатору $\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^i}}$ элемента A^{p^i} и, значит, по определению символа λ_i,

также квазинормализатору $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(\lambda_i)}$. Это, однако, противоречит смыслу разложения (3).

Докажем теперь (это наиболее существенный момент вывода), что каждый из элементов (6) принадлежит смежной системе разложения (4), имеющей вид

$$\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_r N'_j, \tag{7}$$

где j принимает какие-то значения, принадлежащие ряду $2, 3, \ldots, v$, но N_r — определенный ранее выбранный вычет.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся инвариантностью одного выражения, с которым часто приходится встречаться в теории мономиальных представлений групп. Сделаем сначала одно замечание, не связанное непременно с конкретной системой элементов (6).

Возьмем произвольный вычет разложения (4) $N_i N'_j$ и умножим его (справа) на A. В результате получим некоторый элемент группы $\mathfrak{N}_{A^{p^{i+1}}}^{(\lambda_i)}$ который можно представить в виде

$$N_i N'_j A = \overline{N} N_{i_1} N'_{j_1}, \tag{8}$$

где $\overline{N}$ — некоторый элемент квазинормализатора $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)}$. Замечаем, что если элемент $N_i N'_j$ заменить каким-либо другим, принадлежащим к той же смежной системе, то этому другому элементу будет соответствовать (в смысле равенства (8)) некоторый новый элемент $\overline{N'}$, вообще говоря, отличный от $\overline{N}$.

Рассмотрим теперь совокупность смежных систем разложения (4):

$$\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_{i_1} N'_{j_1},\ \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_{i_2} N'_{j_2},\ \ldots,\ \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_{i_a} N'_{j_a}, \tag{9}$$

циклически переходящих одна в другую при умножении (справа) на A, так что

$$\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_{i_1} N'_{j_1} A = \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_{i_2} N'_{j_2},$$
$$\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_{i_2} N'_{j_2} A = \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_{i_3} N'_{j_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_{i_a} N'_{j_a} A = \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_{i_1} N'_{j_1}.$$

Пусть теперь

$$N_{i_1} N'_{j_1} A = \overline{N}_1 N_{i_2} N'_{j_2},$$
$$N_{i_2} N'_{j_2} A = \overline{N}_2 N_{i_3} N'_{j_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$N_{i_a} N'_{j_a} A = \overline{N}_a N_{i_1} N'_{j_1},$$

где все $\overline{N}_1, \overline{N}_2, \ldots, \overline{N}_a$ — элементы группы $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)}$. При известных условиях произведение

$$\overline{N}_1 \overline{N}_2 \ldots \overline{N}_a \tag{10}$$

будет инвариантно по отношению к выбору вычетов в смежных системах (9). В самом деле, будем теперь рассматривать в качестве вычетов систем (9) элементы

$$P_1 N_{i_1} N'_{j_1}, P_2 N_{i_2} N'_{j_2}, \ldots, P_a N_{i_a} N'_{j_a}, \tag{11}$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_a$ — произвольно выбранные элементы группы $\mathfrak{N}^{(\lambda-i-1)}_{A^{p^i}}$.
Умножим все элементы совокупности (11) (справа) на A:

$$P_1 N_{i_1} N'_{j_1} A = P_1 \overline{N}_1 N_{i_2} N'_{j_2} = P_1 \overline{N}_1 P_2^{-1} P_2 N_{i_2} N'_{j_2},$$
$$P_2 N_{i_2} N'_{j_2} A = P_2 \overline{N}_2 N_{i_3} N'_{j_3} = P_2 \overline{N}_2 P_3^{-1} P_3 N_{i_3} N'_{j_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_a N_{i_a} N'_{j_a} A = P_a \overline{N}_a N_{i_1} N'_{j_1} = P_a \overline{N}_a P_1^{-1} P_1 N_{i_1} N'_{j_1}.$$

Роль элементов $\overline{N}_1, \overline{N}_2, \ldots, \overline{N}_a$ играют теперь элементы

$$P_1 \overline{N}_1 P_2^{-1},\ P_2 \overline{N}_2 P_3^{-1}, \ldots, P_a \overline{N}_a P_1^{-1}.$$

Произведение этих элементов равно

$$P_1 \overline{N}_1 P_2^{-1} P_2 \overline{N}_2 P_3^{-1} \ldots P_a \overline{N}_a P_1^{-1} = P_1 \overline{N}_1 \overline{N}_2 \ldots \overline{N}_a P_1^{-1}.$$

Итак, если вычисленное ранее произведение (10) принадлежит к центру группы $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$, то оно будет инвариантно по отношению к выбору системы вычетов в смежных системах (9).

Применим изложенные общие замечания к доказательству того положения, что каждый из элементов (6) принадлежит смежной системе вида (7). Системы

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_r N'_t,\ \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_r N'_t A,\ \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_r N'_t A^2, \ldots \\ \ldots,\ \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_r N'_t A^{p^{i+1}-1}\ ; \end{array}\right\} \tag{12}$$

циклически переходят одна в другую при умножении (справа) на A, так как

$$\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_r N'_t A^{p^{i+1}-1} A = \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_r A^{p^{i+1}} N'_t =$$
$$= \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} A^{p^{i+1} u_r} N_r N'_t = \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_r N'_t.$$

Вычислим произведение вида (10) для совокупности систем (12). При этом за вычеты будем сначала считать элементы

$$N_r N'_t, N_r N'_t A, N_r N'_t A^2, \ldots, N_r N'_t A^{p^{i+1}-1}.$$

Умножаем эти элементы (справа) на A и определяем для данного случая произведение вида (10). Так как при умножении (справа) на A все вычеты (за исключением последнего) переходят один в другой без умножения (слева) на дополнительный фактор, то все $\overline{N}_\alpha$ (за исключением последнего, $\overline{N}_{p^{i+1}}$) равны для данного случая единице. Произведение вида (10) сводится в нашем случае к одному элементу $\overline{N}_{p^{i+1}}$, который легко определяется. Действительно

$$N_r N'_t A^{p^{i+1}-1} A = N_r N'_t A^{p^{i+1}} = N_r A^{p^{i+1}} N'_t = A^{p^{i+1} u_r} N_r N'_t.$$

Итак, интересующее нас произведение равно $A^{p^{i-1}u_r}$. Оно, очевидно, принадлежит к центру группы $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)}$, так как квазинормализатор $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)}$ есть подгруппа нормализатора $\mathfrak{N}_{A^{p^{i+1}}}^{(k-i-1)}$ элемента $A^{p^{i+1}}$. На основании изложенного ранее произведение это обладает свойством инвариантности по отношению к выбору вычетов в смежных системах (12).

Предположим теперь, что какой-нибудь из элементов (6), например элемент $N_r N'_t A^l$, принадлежит системе $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_s N'_{t_1}$ разложения (4), причем $s \neq r$, так что $N_r N'_t A^l = P N_s N'_{t_1}$, где P — некоторый элемент группы $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)}$. Смежные системы (12) можно тогда представить (сохраняя даже порядок следования их) в виде

$$\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_s N'_{t_1} A^{p^{i+1}-l},\ \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_s N'_{t_1} A^{p^{i+1}-l+1},\ \ldots$$
$$\ldots,\ \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_s N'_{t_1} A^{p^{i+1}-1},\ \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_s N'_{t_1},$$
$$\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_s N'_{t_1} A,\ \ldots,\ \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k)} N_s N'_{t_1} A^{p^{i+1}-l-1}. \tag{13}$$

Составим теперь произведение вида (10) для совокупности систем (12), переписанных в виде (13). При этом за вычеты будем принимать элементы

$$N_s N'_{t_1} A^{p^{i+1}-l},\ N_s N'_{t_1} A^{p^{i+1}-l+1},\ \ldots,\ N_s N'_{t_1} A^{p^{i+1}-l-1}.$$

При умножении этих вычетов (справа) на A все они (за исключением одного $N_s N'_{t_1} A^{p^{i+1}-1}$) будут циклически переходить друг в друга без умножения (слева) на дополнительный фактор. Иначе говоря, все элементы $\overline{N}_\alpha$ (за исключением одного, — на этот раз $\overline{N}_l$) равны единице. Что касается элемента $\overline{N}_l$, то он легко вычисляется, так как

$$N_s N'_{t_1} A^{p^{i+1}-1} A = N_s N'_{t_1} A^{p^{i+1}} = N_s A^{p^{i+1}} N'_{t_1} = A^{p^{i+1}u_s} N_s N'_{t_1}.$$

Итак, произведение вида (10) при новом вычислении оказывается равным $A^{p^{i+1}u_s}$. В силу установленного выше свойства инвариантности этого произведения имеем

$$A^{p^{i+1}u_s} = A^{p^{i+1}u_r}$$

или $A^{p^{i+1}(u_r - u_s)} = 1$, откуда $u_r - u_s \equiv 0 \pmod{p^{k-i-1}}$, т. е. $u_r \equiv u_s \pmod{p^{k-i-1}}$ вопреки тому, что было установлено раньше.

Мы приходим таким образом к выводу, что все p^{i+1} элементов вида (6) принадлежат различным смежным системам вида (7). Если системы

$$\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_r N'_j,\ \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_r N'_j A,\ \ldots,\ \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_r N'_j A^{p^{i+1}-1} \tag{14}$$

исчерпывают все смежные системы вида (7), то отсюда будет следовать, что $v - 1 = p^{i+1}$ или $v = 1 + p^{i+1}$ и лемму можно будет считать доказанной.

Если среди систем (7) найдется хоть одна, не принадлежащая к совокупности систем (14), например система $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_r N'_\tau$, то мы рассмотрим новую совокупность систем:

$$\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_r N'_\tau,\ \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_r N'_\tau A,\ \ldots,\ \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)} N_r N'_\tau A^{p^{i+1}-1} \qquad (15)$$

Так же, как раньше, мы докажем: 1) что все эти системы различны, 2) что все они принадлежат к совокупности систем вида (7). Далее отметим, что ни одна из систем (15) не может совпадать ни с одной из систем (14), так как из равенства вида

$$P' N_r N'_i A^{\beta_1} = P'' N_r N'_\tau A^{\beta_2},$$

где P', P'' — элементы группы $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)}$, вытекало бы, что элемент

$$P''^{-1} P' N_r N'_i A^{\beta_1-\beta_2} = N_r N'_\tau$$

принадлежит одной из смежных систем (14), что противоречит способу его выбора. Продолжая тот же процесс далее, вплоть до исчерпания всех систем вида (7), мы придем в конце концов к выводу, что число таких систем $v-1 \equiv 0 \pmod{p^{i+1}}$. Итак, $v \equiv 1 \pmod{p^{i+1}}$, и лемма доказана.

Докажем теперь теорему 1 для случая $\lambda_i \neq k-i$.

Заметим для этого, что по основному свойству квазинормализаторов отношение порядков групп $\mathfrak{N}_{A^{p^{i+1}}}^{(\lambda_i)}$ и $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(\lambda_i)}$ равно отношению порядков группы $\mathfrak{N}_{A^{p^{i+1}}}^{(k-i-1)}$ и $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)}$. Это последнее отношение сравнимо, следовательно, с единицей по модулю p^{i+1}. С другой стороны, нормализатор $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)}$ элемента A^{p^i} есть подгруппа индекса p группы $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)}$.

Итак, в случае $\lambda_i \neq k-i$ отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A^{p^i} делится на p и не делится на p^2. Нетрудно показать далее, что в случае $\lambda_i = k-i$ это отношение не делится даже на p. В самом деле, рассмотрим при этом предположении разложение нормализатора $\mathfrak{N}_{A^{p^{i+1}}}^{(k-i-1)}$ по модулю $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)}$:

$$\mathfrak{N}_{A^{p^{i+1}}}^{(k-i-1)} = \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)} + \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)} N''_2 + \ldots + \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)} N''_f. \qquad (16)$$

Возьмем совокупность смежных систем разложения (16):

$$\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)} N''_r,\ \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)} N''_r A,\ \ldots,\ \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)} N''_r A^{p^{i+1}-1}, \qquad (17)$$

где N''_r — произвольный вычет разложения (16), не равный единице. Все эти системы различны, так как из равенства вида

$$P_1 N''_r A^{l_1} = P_2 N''_r A^{l_2},$$

где P_1 и P_2 — элементы группы $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)}$, следует

$$N''^{-1}_r P_2^{-1} P_1 N''_r = A^{l_2-l_1}.$$

По свойству группы $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)}$ $P_2^{-1} P_1 = A^{m(l_2-l_1)}$, где $m \equiv 1 \pmod{p}$.

Из равенства

$$N_r'' A^{l_2-l_1} N_r''^{-1} = A^{m(l_2-l_1)}$$

вытекает

$$N_r'' A^{p^i} N_r''^{-1} = A^{mp^i},$$

что противоречит смыслу разложения (16).

Если среди смежных систем разложения (16) найдется система $\mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}} N_s''$ $(s \neq 1)$, не принадлежащая к совокупности систем (17), то мы можем построить новую совокупность систем:

$$\mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}} N_s'',\ \mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}} N_s'' A, \ldots,\ \mathfrak{N}^{(k)}_{A^{p^i}} N_s'' A^{p^{i+1}-1}.$$

Легко видеть, что ни одна из вновь построенных систем не совпадает ни с одной из систем (17). Кроме того, все эти системы различны. Продолжая тот же процесс далее, до исчерпания всех систем разложения (16), приходим в конце концов к выводу, что индекс разложения группы $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^{i+1}}}$ по модулю $\mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}}$ сравним с единицей по модулю p^{i+1}.

Теорема 1 доказана полностью. Выведем некоторые следствия из этой теоремы.

Замечая, прежде всего, что квазинормализатор $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$, о котором идет речь в условии теоремы, есть подгруппа нормализатора $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^{i+1}}}$ элемента $A^{p^{i+1}}$, приходим к такой формулировке:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Если каждый элемент нормализатора элемента $A^{p^{i+1}}$ $(i < k)$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A^{p^i} не делится на p^2.*

С другой стороны, квазинормализатор $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$ есть подгруппа нормализатора циклической группы $\{A^{p^i}\}$, что приводит нас также к следующему результату:

ТЕОРЕМА 3. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Если каждый элемент нормализатора циклической группы $\{A^{p^i}\}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A^{p^i} не делится на p^2.*

Следует отметить, что теорема 3 могла бы быть доказана непосредственно и притом более просто, чем теорема 1. Дело в том, что квазинормализатор $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$ является подгруппой нормализатора циклической группы $\{A^{p^i}\}$. Следовательно, по условию теоремы 3 каждый элемент квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$, сопряженный с A^z, должен иметь вид A^{mz}.

где $m \equiv 1 \pmod p$. Поэтому, вместо разложения вида (4), которое мы рассматривали при выводе теоремы 1, можно было бы для доказательства леммы использовать разложение квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ по модулю $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$.

Далее отметим такое следствие теоремы 1:

ТЕОРЕМА 4. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Если каждый элемент $(k-i-1)$-го квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$ элемента A^{p^i}, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A не делится на p^{i+2}*

К теореме 4 мы приходим, применяя последовательно надлежащее число раз теорему 1. Следствиями теоремы 4 являются такие результаты:

ТЕОРЕМА 5. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Если каждый элемент нормализатора элемента $A^{p^{i+1}}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A не делится на p^{i+2}.*

ТЕОРЕМА 6. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Если каждый элемент нормализатора циклической группы $\{A^{p^i}\}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A не делится на p^{i+2}.*

Разумеется, теоремы 5 и 6 могут рассматриваться также как следствия теорем 2 и 3. К наиболее важному частному случаю теорем 4, 5 и 6 мы придем, положив в условиях этих теорем $i = k-2$. Именно, этот частный случай будет использован в дальнейшем при выводе критериев непростоты группы.

Заметим, наконец, что если нормализатор элемента A^{p^i} совпадает с нормализатором элемента A, то можно несколько усилить теорему 2, доказав следующее предложение:

ТЕОРЕМА 7. *Пусть A — элемент порядка p^k (p — нечетное простое число) некоторой группы $\mathfrak{G}$. Если нормализатор элемента A^{p^i} совпадает с нормализатором элемента A и каждый элемент этого нормализатора, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A^{p^i} сравнимо с единицей по модулю p^{i+1}.*

Доказательство. Из равенства $\mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}} = \mathfrak{N}^{(k)}_{A}$ следует $\mathfrak{N}^{(k-i+1)}_{A^{p^{i-1}}} = \mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}}$, но так как $\mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}} \supseteq \mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^{i-1}}}$ и $\mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^{i-1}}} \supseteq \mathfrak{N}^{(k-i+1)}_{A^{p^{i-1}}}$, то $\mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^{i-1}}} = \mathfrak{N}^{(k-i+1)}_{A^{p^{i-1}}}$. Значит (по основному свойству квазинормализаторов)

$$\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{i-1}}} = \mathfrak{N}^{(2)}_{A^{p^{i-1}}} = \ldots = \mathfrak{N}^{(k-i+1)}_{A^{p^{i-1}}},$$

т. е.

$$\lambda_{i-1}=k-i+1.$$

Докажем теперь, что $\lambda_i=k-i$. Рассмотрим для этого разложение какого-нибудь квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(l)}_{A^{p^i}}$ элемента A^{p^i} по модулю $\mathfrak{N}^{(k-i+1)}_{A^{p^{i-1}}}$

$$\mathfrak{N}^{(l)}_{A^{p^i}}=\mathfrak{N}^{(k-i+1)}_{A^{p^{i-1}}}+\mathfrak{N}^{(k-i+1)}_{A^{p^{i-1}}}N_2+\ldots+\mathfrak{N}^{(k-i+1)}_{A^{p^{i-1}}}N_v. \tag{18}$$

Применяя метод, уже использованный при доказательстве теоремы 1 (случай $\lambda_i=k-i$), нетрудно показать, что $v\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p^i)$. В самом деле, достаточно заметить, что системы

$$\mathfrak{N}^{(k-i+1)}_{A^{p^{i-1}}}N_r,\ \mathfrak{N}^{(k-i+1)}_{A^{p^{i-1}}}N_rA,\ \ldots,\ \mathfrak{N}^{(k-i+1)}_{A^{p^{i-1}}}N_rA^{p^i-1}$$

(где N_r обозначает произвольный вычет разложения (18), не равный единице) все различны и каждая из них представляет собою смежную систему в разложении (18). Таким образом все смежные системы разложения можно сгруппировать в совокупности, каждая из которых содержит p^i систем.

Итак, $v\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p^i)$ и, значит, v не делится на p. Отсюда, опять-таки по основному свойству квазинормализаторов,

$$\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^i}}=\mathfrak{N}^{(2)}_{A^{p^i}}=\ldots=\mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}},$$

т. е.

$$\lambda_i=k-i.$$

Но теперь остается только повторить доказательство теоремы 1 (для случая $\lambda_i=k-i$), чтобы прийти к выводу, что отношение порядко групп $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^{i+1}}}$ и $\mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}}$ сравнимо с единицей по модулю p^{i+1}.

§ 3. Группы четного порядка

Доказательства приведенных в § 2 теорем существенным образом основывались на свойствах таблицы квазинормализаторов (1). Поэтому в случае, когда порядок элемента A есть степень 2, теоремы эти будут, вообще говоря, неприменимы. Однако, если ввести дополнительное условие $\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{2^{k-2}}}=\mathfrak{N}^{(2)}_{A^{2^{k-2}}}$, то, как уже отмечалось в § 1, все свойства таблицы квазинормализаторов остаются в силе и все теоремы предыдущего параграфа будут справедливы и для случая $p=2$.

Заметим кстати, что условие $\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{2^{k-2}}}=\mathfrak{N}^{(2)}_{A^{2^{k-2}}}$ сводится к требованию, чтобы элемент 4-го порядка $A^{p^{k-2}}$ не был сопряжен со своим обратным элементом.

Приведем теперь видоизменение теоремы 1 для случая $p=2$.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть A — элемент порядка 2^k группы $\mathfrak{G}$. Если каждый элемент $(k-i-1)$-го квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{2^i}}$ элемента A^{2^i} $(i<k)$,*

сопряженный со степенью A, есть снова степень A и элемент $A^{2^{k-2}}$ не сопряжен со своим обратным элементом, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{2^{i+1}}$ и A^{2^i} не делится на 4.

Совершенно аналогичным образом видоизменяются для случая $p=2$ и теоремы 2—7. Отметим только особо видоизменения одного частного случая теоремы 4 ($i=k-2$) для $p=2$.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть A — элемент порядка 2^k группы $\mathfrak{G}$. Если каждый элемент нормализатора элемента $A^{2^{k-2}}$, сопряженный со степенью A, есть снова степень A и элемент $A^{2^{k-2}}$ не сопряжен со своим обратным элементом, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{2^{k-1}}$ и A не делится на 2^{k-1}.*

В формулировке теоремы речь идет о неделимости на 2^{k-1} (а не на 2^k), так как по условию теоремы 9 отношение между порядками нормализаторов элементов $A^{2^{k-1}}$ и $A^{2^{k-2}}$ — нечетно.

§ 4. Критерии непростоты группы

Приведем следующую теорему о непростоте группы:

ТЕОРЕМА 10. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Пусть каждый элемент нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$. Если нормализатор элемента A — абелева группа, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель. Порядок этого нормального делителя кратен n, если через $p^\beta n$ обозначен порядок группы $\mathfrak{G}$ (n не делится на p).*

Доказательство вытекает из предыдущего. Именно, из теоремы 5 следует, что порядок нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$ не делится на $p^{\alpha+k}$ (если через p^α обозначена наивысшая степень p, на которую делится порядок нормализатора элемента A). Остается только применить цитированную в § 1 теорему А, приняв в данном случае за группу $\mathfrak{P}$ p-подгруппу Силова нормализатора элемента А.

Заметим, что в формулировке теоремы 10 нормализатор элемента $A^{p^{k-1}}$ можно было бы заменить нормализатором циклической группы $\{A^{p^{k-2}}\}$ или квазинормализатором $\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{k-2}}}$ элемента $A^{p^{k-2}}$. Разумеется, тогда для доказательства пришлось бы сослаться на 6-ю или 4-ю теорему § 2.

С другой стороны, требование коммутативности нормализатора элемента A в условии теоремы 10 можно заменить более слабым требованием коммутативности силовской p-подгруппы нормализатора элемента A.

Из теоремы 10 вытекает как частный случай такое предложение:

ТЕОРЕМА 11. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^\beta n$ (p — простое нечетное число, n — взаимно простое с $p(p-1)$). Пусть каждый элемент нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$, сопряженный со степенью A, есть снова степень A. Если нормализатор элемента A — абе-*

лева группа, то группа $\mathfrak{G}$ *имеет нормальный делитель порядка, делящегося на* n.

Наконец, для случая $p=2$, комбинируя теорему 9 (§ 3) и теорему В (§ 1), можно получить следующий результат:

ТЕОРЕМА 12. *Пусть* A — *элемент порядка* 2^k *группы* $\mathfrak{G}$ *порядка* $2^\beta n$ *(*n — *нечетное). Пусть каждый элемент нормализатора элемента* $A^{2^{k-2}}$, *сопряженный со степенью* A, *есть снова степень* A, *и элемент* $A^{2^{k-2}}$ *не сопряжен со своим обратным элементом. Если нормализатор элемента* A — *абелева группа, то группа* $\mathfrak{G}$ *имеет нормальный делитель порядка, кратного* n.

И здесь, как и в теореме 10, требование коммутативности нормализатора элемента A можно заменить более слабым требованием коммутативности той силовской подгруппы этого нормализатора, порядок которой есть степень 2.

Разумеется, для случая $k=1$ в условии теоремы 12 нормализатор элемента $A^{p^{k-2}}$ надо заменить нормализатором элемента $A^{p^{k-1}}$. Требование о несопряженности элемента $A^{p^{k-2}}$ со своим обратным элементом в этом случае ($k=1$) должно быть просто снято, так как это вытекает из способа доказательства теоремы А и замечаний по поводу доказательства теоремы, приведенных в упоминавшейся работе В. К. Туркина([4]). В случае $k=1$ таблица квазинормализаторов вообще не играет роли в доказательстве теоремы А и не приходится делать различия между случаями четного и нечетного p.

Применяя теорему 10 к специальному случаю $k=1$ и учитывая замечания, только что сделанные по поводу теоремы 12, приходим к такому результату:

ТЕОРЕМА 13. *Пусть* A — *элемент порядка* p *группы* $\mathfrak{G}$ *(*p — *простое число). Если силовская* p*-подгруппа нормализатора элемента* A — *абелева и ни один элемент ее не сопряжен с* A, *то группа* $\mathfrak{G}$ *имеет нормальный делитель. Порядок этого нормального делителя кратен* n, *если через* $p^\beta n$ *обозначен порядок группы* $\mathfrak{G}$ *(*n *не делится на* p*).*

Для доказательства теоремы 13 достаточно отметить, что при нечетном p она представляет собой частный случай теоремы 10. В самом деле, если элемент A не сопряжен ни с одним элементом некоторой силовской p-подгруппы своего нормализатора, то он не может быть сопряжен вообще ни с одним элементом своего нормализатора (так как элемент A входит в любую силовскую p-подгруппу своего нормализатора, и предположение о сопряженности элемента с каким-либо элементом л ю б о й такой подгруппы приводит сейчас же к противоречию). Таким образом все предпосылки теоремы 10 выполняются.

Справедливость теоремы для $p=2$ вытекает из теоремы 12 и тех замечаний, которые были сделаны по поводу этой теоремы.

Теорема 13 является обобщением (поскольку речь идет о существовании нормального делителя, а не о порядке его) известного предложения Бернсайда ([5]): «Если группа $\mathfrak{G}$ порядка g имеет подгруппу

Силова порядка p^α, входящую в центр своего нормализатора, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка $\frac{g}{p^\alpha}$ ».

Для того чтобы от теоремы 13 перейти к приведенной теореме Бернсайда, достаточно принять за элемент A подходящий (т. е. порядка p) элемент, принадлежащий центру подгруппы Силова $\mathfrak{P}$ группы $\mathfrak{G}$. Действительно, из предпосылок теоремы Бернсайда вытекает, что элемент A не сопряжен ни с одним из элементов группы $\mathfrak{P}$.

Нетрудно видеть, что теорема 13 обобщает также следующую теорему, доказанную В. К. Туркиным в работе «Ein neues Kriterium der Einfachheit einer endlichen Gruppe» (6):

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа порядка $p^\beta n$ (p — простое число, n не делится на p). Пусть подгруппа Силова $\mathfrak{P}$ порядка p^β — абелева. Если группа $\mathfrak{P}$ содержит элемент, принадлежащий центру нормализатора группы $\mathfrak{P}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n.

В самом деле, достаточно заметить, что если группа $\mathfrak{P}$ содержит какой-то элемент, принадлежащий центру нормализатора этой группы, то в группе $\mathfrak{P}$ найдется также элемент порядка p, тоже принадлежащий центру нормализатора группы $\mathfrak{P}$.

Заметим в заключение, что теорема 13 может быть также получена как непосредственное следствие теорем A и B.

Институт математики
Московского гос. университета.

Поступило
7. I. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

1 Turkin W. K., Über Quasinormalisatoren der Elemente in endlichen Gruppen, Матем. сб. 2 (44): 5, 1937.
2 Туркин В. К., Квазинормализаторы и мономиальные представления, Изв. Ак. Наук СССР, Серия матем., 1938, № 4.
3 Дюбюк П. Е., О порядке элемента в простой группе, Изв. Ак. Наук СССР, Серия матем., 1938, № 5—6.
4 Туркин В. К. и Дюбюк П. Е., О строении простых групп, Докл. Ак. Наук СССР, XX, № 7—8, 1938.
5 Burnside W., Theory of groups of finite order, 1911, p. 327; Шмидт О. Ю., Абстрактная теория групп, 1933, стр. 168.
6 Turkin W. K., Ein neues Kriterium der Einfachheit einer endlichen Gruppe, Mathem. Ann., 111 (1935), 281—284.

P. DUBUQUE. SUR LE NORMALISATEUR D'UN ÉLÉMENT DANS UN GROUPE FINI *

RÉSUMÉ

Le but du présent article est de démontrer certains théorèmes sur le normalisateur d'un élément dans un groupe fini. On emploie la méthode et les notations de la théorie des quasinormalisateurs construite par W. Turkin (1), ainsi que des méthodes nouvelles.

Les théorèmes obtenus s'appliquent ensuite pour obtenir quelques nouveaux critères pour les groupes finis non simples. Le théorème fon-

* Une communication préliminaire des résultats de cet article a été publiée dans les C. R. de l'Acad. des Sciences de l'URSS, t. XXII, fasc. 3 (1939).

damental dont on déduit ensuite plusieurs résultats est la proposition suivante:

THÉORÈME 1. *Soit A un élément d'ordre p^k d'un groupe $\mathfrak{G}$ (p est un nombre premier impair). Si chaque élément du $(k-i-1)$-ième quasi-normalisateur $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$ de l'élément A^{p^i} conjugué à A^z est de la forme A^{mz}, où $m \equiv 1 \pmod p$, alors le rapport des ordres des normalisateurs des éléments $A^{p^{i+1}}$ et A^{p^i} n'est pas divisible par p^2.*

Le symbole λ_i sera employé dans le même sens que dans l'article de W. Turkin «Quasinormalisateurs et représentations monomiales» [2]. Nous considérons d'abord le cas $\lambda_i \neq k-i$. Dans ce cas la démonstration du théorème est basée sur la proposition auxiliaire suivante:

LEMME. *Dans les conditions du théorème 1 et si d'ailleurs $\lambda_i \neq k-i$, le rapport des ordres des quasinormalisateurs $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$ et $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ est congru à un par rapport au module p^{i+1}.*

Pour démontrer le lemme on considère la décomposition du groupe $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ suivant le module $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$

$$\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}} = \mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}} + \mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}} N'_2 + \ldots + \mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}} N'_v.$$

Remarquons que les résidus de cette décomposition $N'_2, \ldots, N'_v$ peuvent être choisis de telle manière qu'ils soient tous permutables avec $A^{p^{i-1}}$. On considère ensuite la décomposition du groupe $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$ suivant le module $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$:

$$\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}} = \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_2 + \ldots + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_\varphi.$$

Alors la décomposition du groupe $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ suivant le module $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$ aura la forme

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}} = & (\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_2 + \ldots + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_\varphi) + \\ & + (\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_2 + \ldots + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_\varphi) N'_2 + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_2 + \ldots + \mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_\varphi) N'_v. \end{aligned} \qquad (1)$$

Considérons un résidu quelconque de cette décomposition $N_r N'_t$ en supposant toutefois que $t \neq 1$ et considérons l'ensemble suivant des éléments

$$N_r N'_t, \quad N_r N'_t A, \ \ldots, \ N_r N'_t A^{p^{i+1}-1}. \qquad (2)$$

Nous démontrons 1) que tous les éléments de (2) appartiennent aux systèmes différents de la décomposition (1), 2) que chaque élément de (2) appartient à un système de la décomposition (1) ayant la forme $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}} N_r N'_j$, où j prend certaines valeurs appartenant à la suite $2, 3, \ldots, v$

et N_r est un élément déterminé précédemment choisi. La démonstration de la seconde de ces affirmations est assez compliquée; elle est basée sur l'invariance, par rapport au choix du système des résidus, d'une certaine expression que l'on considère souvent dans la théorie des représentations monomiales des groupes. Au point de vue de la méthode, c'est ce qui est le plus essentiel dans la démonstration. En tenant compte des propositions établies, on démontre facilement que $v-1\equiv 0 \pmod{p^{i+1}}$ ce qui prouve que le lemme est vrai.

Pour démontrer le théorème dans le cas où $\lambda_i \neq k-i$ il suffit maintenant de remarquer que le rapport des ordres des groupes $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ et $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$ est égal au rapport des ordres des groupes $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^{i+1}}}$ et $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$ et que d'autre part le normalisateur $\mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}}$ de l'élément A^{p^i} est un sous-groupe d'indice p du groupe $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$.

Dans le cas où $\lambda_i = k = i$ le théorème peut être démontré au moyen de raisonnements très simples.

Comme conséquence immediate du théorème 1 on a les résultats suivants:

THÉORÈME 2. *Soit A un élément d'ordre p^k d'un groupe $\mathfrak{G}$ (p étant un nombre premier impair). Si chaque élément du normalisateur de l'élément $A^{p^{i+1}}$ conjugué à A^z est de la forme A^{mz}, où $m\equiv 1 \pmod p$, alors le rapport des ordres des normalisateurs des éléments $A^{p^{i+1}}$ et A^{p^i} n'est pas divisible par p^2.*

THÉORÈME 3. *Soit A un élément d'ordre p^k du groupe $\mathfrak{G}$ (p étant un nombre premier impair). Si chaque élément du normalisateur du groupe cyclique $\{A^{p^i}\}$ conjugué à A^z est de la forme A^{mz}, où $m\equiv 1 \pmod p$, alors le rapport des ordres des normalisateurs des éléments $A^{p^{i+1}}$ et A^{p^i} n'est pas divisible par p^2.*

L'application successive des théorèmes 1, 2 et 3 conduit aux propositions suivantes:

THÉORÈME 4. *Soit A un élément d'ordre p^k d'un groupe $\mathfrak{G}$ (p étant un nombre premier impair). Si chaque élément du $(k-i-1)$-ième quasi-normalisateur $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$ d'un élément A^{p^i} conjugué à A^z est de la forme A^{mz}, où $m\equiv 1 \pmod p$, alors le rapport des ordres des normalisateurs des éléments $A^{p^{i+1}}$ et A n'est pas divisible par p^{i+2}.*

THÉORÈME 5. *Soit A un élément d'ordre p^k d'un groupe $\mathfrak{G}$ (p étant un nombre entier impair). Si chaque élément du normalisateur de l'élément $A^{p^{i+1}}$ conjugué à A^z est de la forme A^{mz}, où $m\equiv 1 \pmod p$, alors le rapport des ordres des normalisateurs des éléments $A^{p^{i+1}}$ et A n'est pas divisible par p^{i+2}.*

THÉORÈME 6. *Soit A un élément d'ordre p^k d'un groupe $\mathfrak{G}$ (p étant un nombre entier impair). Si chaque élément du normalisateur du groupe*

cyclique $\{A^{p^i}\}$ *conjugué à* A^z *est de la forme* A^{mz}, *où* $m \equiv 1 \pmod p$, *alors le rapport des ordres des normalisateurs des éléments* $A^{p^{i+1}}$ *et* A *n'est pas divisible par* p^{i+2}.

On déduit ensuite une proposition de caractère plus spécial:

THÉORÈME 7. *Soit* A *un élément d'ordre* p^k *(*p *étant un nombre premier impair) d'un certain groupe* $\mathfrak{G}$. *Si le normalisateur de l'élément* A^{p^i} $(i \neq 0)$ *coïncide avec le normalisateur de l'élément* A *et chaque élément de ce normalisateur conjugué à* A^z *est de la forme* A^{mz}, *où* $m \equiv 1 \pmod p$, *alors le rapport des ordres des normalisateurs des éléments* $A^{p^{i+1}}$ *et* A *est congru à un par rapport au module* p^{i+1}.

Les théorèmes $1-7$ subsistent dans le cas où $p=2$, si l'on ajoute la condition supplémentaire suivante: l'élément du quatrième ordre $A^{2^{k-2}}$ ne doit pas être conjugué à son élément inverse (3). Ainsi le théorème 1 est modifié de la manière suivante:

THÉORÈME 8. *Soit* A *un élément d'ordre* 2^k *d'un groupe* $\mathfrak{G}$. *Si chaque élément du* $(k-i-1)$*-ième quasinormalisateur* $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{2^i}}$ *de l'élément* A^{2^i} *conjugué à une puissance de* A *est encore une puissance de* A *et si l'élément* $A^{2^{k-2}}$ *n'est pas conjugué à son élément inverse, alors le rapport des ordres des normalisateurs des éléments* $A^{2^{i+1}}$ *et* A^{2^i} *n'est pas divisible par* 4.

D'une manière analogue les théorèmes $2-7$ sont aussi modifiés pour le cas $p=2$. En particulier, le théorème 4 pour $i=k-2$ et $p=2$ prend la forme:

THÉORÈME 9. *Soit* A *un élément d'ordre* 2^k *du groupe* $\mathfrak{G}$. *Si chaque élément du normalisateur de l'élément* $A^{2^{k-2}}$ *conjugué à une puissance de* A *est encore une puissance de* A, *et si l'élément* $A^{2^{k-2}}$ *n'est pas conjugué à son élément inverse, alors le rapport des ordres des normalisateurs des éléments* $A^{p^{k-1}}$ *et* A *n'est pas divisible par* 2^{k-1}.

En appliquant le théorème 5 on peut déduire le critère suivant pour les groupes non simples:

THÉORÈME 10. *Soit* A *un élément d'ordre* p^k *d'un groupe* $\mathfrak{G}$ *(*p *étant un nombre premier impair). Supposons que chaque élément du normalisateur de l'élément* $A^{p^{k-1}}$ *conjugué à* A^z *est de la forme* A^{mz} *où* $m \equiv 1 \pmod p$. *Si le normalisateur de l'élément* A *est un groupe abelien, le groupe* $\mathfrak{G}$ *possède un diviseur normal. L'ordre de ce diviseur normal est un multiple de* n, *si l'on désigne par* $p^\beta n$ *l'ordre du groupe* $\mathfrak{G}$ *(*n *est premier avec* p*).*

Comme cas particulier du théorème 10 on a la proposition suivante:

THÉORÈME 11. *Soit* A *un élément d'ordre* p^k *d'un groupe* $\mathfrak{G}$ *d'ordre* $p^\beta n$ *(*p *étant un nombre premier impair et* n *premier avec* $p(p-1)$*). Supposons que chaque élément du normalisateur de l'élément* $A^{p^{k-1}}$ *conjugué*

à une puissance de A est encore une puissance de A. Si le normalisateur de l'élément A est un groupe abelien, alors le groupe $\mathfrak{G}$ possède un diviseur normal dont l'ordre est un multiple de n.

Pour le cas où $p=2$ on a le résultat suivant:

THÉORÈME 12. *Soit A un élément d'ordre 2^k d'un groupe $\mathfrak{G}$ d'ordre $2^\beta n$ (n étant impair). Supposons que chaque élément du normalisateur de l'élément $A^{2^{k-2}}$ conjugué à une puissance de A est encore une puissance de A et que l'élément $A^{2^{k-2}}$ n'est pas conjugué à son élément inverse. Si le normalisateur de l'élément A est un groupe abelien, le groupe $\mathfrak{G}$ possède un diviseur normal dont l'ordre est un multiple de n.*

Ainsi que dans les conditions du théorème 10, au lieu d'éxiger que le normalisateur de l'élément A soit commutatif, on peut faire une hypothèse moins restrictive, à savoir que le sousgroupe de Syloff de ce normalisateur dont l'ordre est une puissance de 2 soit commutatif.

Comme conséquence immédiate des théorèmes 11 et 12 on a le théorème suivant:

THÉORÈME 13. *Soit A un élément d'ordre p d'un groupe $\mathfrak{G}$ (p étant un premier impair). Si le p—sousgroupe de Syloff du normalisateur de l'élément A est un groupe abelien et si aucun de ses éléments n'est conjugué à A, le groupe $\mathfrak{G}$ possède un diviseur normal. L'ordre de ce diviseur normal est un multiple de n, si l'on désigne par $p^\beta n$ l'ordre du groupe $\mathfrak{G}$ (n n'est pas divisible par p).*

Le théorème 13, en ce qui concerne l'existence d'un diviseur normal et non pas son ordre, est une généralisation d'une proposition connue de Burnside (5):

«Si un groupe $\mathfrak{G}$ d'ordre g possède un sousgroupe de Syloff d'ordre p^α appartenant au centre de son normalisateur, alors le groupe $\mathfrak{G}$ possède un diviseur normal d'ordre $\frac{g}{p^\alpha}$».

Le théorème 13 donne aussi une généralisation du théorème suivant démontré par W. Turkin dans son article «Ein neues Kriterium der Einfachheit einer endlichen Gruppe» (6):

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe d'ordre $p^\beta n$ (p étant un nombre premier, n étant non divisible par p). Supposons que le sousgroupe de Syloff $\mathfrak{P}$ d'ordre p^β est un groupe abelien. Si le groupe $\mathfrak{P}$ contient un élément appartenant au centre du normalisateur du groupe $\mathfrak{P}$, le groupe $\mathfrak{G}$ possède un diviseur normal dont l'ordre est un multiple de n.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

Е. С. ЛЯПИН

О РАЗЛОЖЕНИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП В ПРЯМЫЕ СУММЫ ГРУПП ПЕРВОГО РАНГА

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье дается необходимое и достаточное условие разложимости абелевой группы в прямую сумму групп первого ранга при условии, что ее периодическая подгруппа (т. е. совокупность элементов конечного порядка) и фактор-группа по периодической подгруппе допускают такое разложение. Таким образом вопрос о возможности такого разложения для произвольной абелевой группы сводится к разложению периодических групп и групп без кручения.

В теории абелевых групп существенным является вопрос о разложимости групп в прямые суммы групп первого ранга *. До сих пор исследования преимущественно шли по пути изучения двух классов абелевых групп: периодических групп, т. е. групп, все элементы которых имеют конечные порядки, и групп без кручения, т. е. групп, не содержащих иных элементов конечного порядка, кроме нулевого. Необходимое и достаточное условие для разложимости исчислимых периодических абелевых групп в прямые суммы групп первого ранга было дано H. Prüfer'ом (1); для некоторых классов абелевых групп без кручения такое условие было получено R. Baer'ом (2) и для групп без кручения, имеющих конечный ранг, Е. Ляпиным (3).

В настоящей статье вопрос о разложимости произвольных абелевых групп в прямые суммы групп первого ранга сводится к решению этого вопроса для периодических групп и для групп без кручения. В статье дано необходимое и достаточное условие разложимости абелевой группы в прямую сумму групп первого ранга при условии, что ее периодическая подгруппа и фактор-группа по периодической подгруппе разлагаются в прямые суммы групп первого ранга (4).

---

* Ранг группы равен 1, если всякий конечный комплекс ее элементов порождает циклическую группу.

§ 1

Пусть $\mathfrak{G}$ есть некоторая абелева группа. Совокупность элементов из $\mathfrak{G}$, порядки которых конечны, образует подгруппу, которую назовем периодической и обозначим через $\mathfrak{T}$.

Будем говорить, что элемент группы G делится на n, где n есть некоторое целое положительное число, если в группе найдется такой элемент G', что $nG' = G$. В этом случае будем применять обозначение $G' = \frac{1}{n} G$. Отметим, что обозначение это неоднозначно, т. е. если $G' = \frac{1}{n} G$ и $G'' = \frac{1}{n} G$, то необязательно $G' = G''$, справедливо лишь $(G' - G'') \in \mathfrak{T}$.

Рассмотрим различные последовательности целых положительных чисел, в которых каждое предшествующее число есть делитель последующего. Будем говорить, что последовательность $\alpha = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ есть делитель последовательности $\beta = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ и обозначать α / β, если каждое a_i есть делитель какого-нибудь b_{j_i}. Если одновременно α / β и β / α, то будем говорить, что α и β эквивалентны. Этим соотношением эквивалентности множество всех таких последовательностей разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой последовательностей. Легко показать, что если в классе $\bar{\alpha}$ найдется последовательность α и в классе $\bar{\beta}$ последовательность β такие, что α / β, то всякая последовательность из $\bar{\alpha}$ будет делителем всякой последовательности из $\bar{\beta}$, а потому естественно говорить, что сам класс $\bar{\alpha}$ есть делитель $\bar{\beta}$, $\bar{\alpha} / \bar{\beta}$. Заметим, что если $\bar{\alpha} / \bar{\beta}$ и $\bar{\beta} / \bar{\gamma}$, то очевидно $\bar{\alpha} / \bar{\gamma}$. Для всякой конечной совокупности классов $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n$ существует общий наибольший делитель, т. е. такой класс $\bar{\alpha}$, что $\bar{\alpha} / \bar{\alpha}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $\bar{\beta} / \bar{\alpha}$ для всякого $\bar{\beta}$, для которого выполняются $\bar{\beta} / \bar{\alpha}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В этом случае будем пользоваться обозначением $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$. Пусть $\alpha = (a_1, a_2, \ldots)$, тогда последовательность $\alpha' = (na_1, na_2, \ldots)$, где n есть некоторое целое положительное число, обозначим через $n\alpha$. Если класс $\bar{\alpha}$ содержит последовательность α такую, что $n\alpha \in \bar{\beta}$, то для любой последовательности α' из $\bar{\alpha}$ имеет место $n\alpha' \in \bar{\beta}$; в этом случае будем применять обозначения $n\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ и $\bar{\alpha} = \frac{1}{n} \bar{\beta}$.

Рассмотрим совокупность чисел, на которые делится некоторый элемент группы G. Если эта совокупность содержит два каких-либо числа, то она содержит и их наименьшее кратное. Пользуясь этим свойством, легко доказать, что из такой совокупности всегда можно выделить последовательность, в которой каждое предшествующее число является делителем последующего, причем выполняется свойство: если G делится на n, то, начиная с некоторого места, все числа этой последователь-

ности делятся на n. Такую последовательность назовем характеристической последовательностью элемента G. Очевидно, последовательность, эквивалентная характеристической последовательности G, сама является характеристической последовательностью для G, и все характеристические последовательности G эквивалентны между собой. Таким образом элементу G соответствует класс характеристических последовательностей, который назовем характеристикой G и будем обозначать через $\chi_{\mathfrak{G}}(G)$ или просто $\chi(G)$ там, где это не может вызвать недоразумений.

Элемент G, принадлежащий некоторому комплексу $\mathfrak{A}$, назовем максимальным в $\mathfrak{A}$, если характеристики всех элементов из $\mathfrak{A}$ являются делителями характеристики G или, что то же самое, если элемент G делится на всякое число, на которое делится какой-либо элемент из $\mathfrak{A}$.

§ 2

Приведем некоторые свойства элементов и их характеристик, которые понадобятся нам в дальнейшем:

1. Пусть $X = A + B$ и $(\chi(A), \chi(B)) = \chi_0$, тогда $\chi_0 / \chi(X)$.

2. Пусть n — некоторое целое число, тогда $n\chi(G)/\chi(nG)$, если же rang $\mathfrak{G} = 1$, $\mathfrak{G}$ неразложима в прямую сумму и $nG \neq 0$, то $n\chi(G) = \chi(nG)$.

3. Если $\mathfrak{G}$ разложима в прямую сумму $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$, и $G \in \mathfrak{A}$, то $\chi_{\mathfrak{G}}(G) = \chi_{\mathfrak{A}}(G)$.

4. Пусть $\mathfrak{G} = \sum_{i=1}^{n} \oplus \mathfrak{A}_i$ и $G = \sum_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \in \mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, тогда $\chi(G) = (\chi(A_1), \chi(A_2), \ldots, \chi(A_n))$.

5. Пусть $\mathfrak{G}$ разложима в прямую сумму групп первого ранга и пусть $n/\chi(G)$, тогда в $\mathfrak{G}$ найдется такой элемент G', что $nG' = G$ и $n\chi(G') = \chi(G)$.

Действительно, пусть $\mathfrak{G} = \sum_{\nu} \oplus \mathfrak{R}_\nu$, где $\mathfrak{R}_\nu$ суть неразложимые в прямую сумму группы первого ранга, и $G = \sum_{\lambda=1}^{m} G_\lambda$, где $G_\lambda \in \mathfrak{R}_\lambda$ и $G_\lambda \neq 0$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, m)$, тогда, согласно свойствам 3 и 4, $\chi(G) = (\chi(G_1), \chi(G_2), \ldots, \chi(G_m))$ и, следовательно, $n/\chi(G_\lambda)$, т. е. $\mathfrak{R}_\lambda \ni G'_\lambda = \frac{1}{n} G_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, m)$.

Рассмотрим элемент $G' = \sum_{\lambda=1}^{m} G'_\lambda$. По свойству 3, $\chi(G') = (\chi(G'_1), \chi(G'_2), \ldots, \chi(G'_m))$, а так как по свойству 2 $\chi(G'_\lambda) = \frac{1}{n}\chi(G_\lambda)$, то $\chi(G') = \frac{1}{n}\chi(G)$. Так как к тому же $nG' = G$, то G' и есть искомый элемент.

6. Если элемент G максимален в классе смежности по периодической подгруппе $G+\mathfrak{T}$ и если в $\mathfrak{G}$ существует элемент $\frac{1}{bc}(acG)$, где $(a,b)=1$, то в $\mathfrak{G}$ также существует элемент $\frac{1}{b}G$.

Действительно, пусть $bcX=acG$ и пусть x и y такие целые числа, что $ax+by=1$, тогда имеем:

$$c\,(bxX+byG-G)=xbcX+cbyG-cG=xacG+cbyG-cG=$$
$$=c\,(ax+by-1)\,G=0,$$

т. е. $(bxX+byG-G)\in\mathfrak{T}$ или $b\,(xX+yG)\in G+\mathfrak{T}$.

Итак, в комплексе $G+\mathfrak{T}$ существует элемент $b\,(xX+yG)$, который делится на b, но G максимален, следовательно, G также должен делиться на b.

§ 3

ЛЕММА. *Пусть $\mathfrak{T}$ — периодическая подгруппа $\mathfrak{G}$ — разложима в прямую сумму групп первого ранга и пусть ранг фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ равен единице; тогда, если в каждом классе смежности по $\mathfrak{T}$ имеется хотя бы один максимальный элемент, то $\mathfrak{T}$ является прямым слагаемым $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Возьмем какой-нибудь класс смежности по $\mathfrak{T}$, отличный от самой $\mathfrak{T}$. Выберем в нем максимальный элемент G_1. Пусть $n_1, n_2, n_3, \ldots$ есть некоторая характеристическая последовательность G_1 (причем обозначим $m_1=n_1$ и $m_{i+1}=\frac{n_{i+1}}{n_i}$ для $i=1, 2, \ldots$). Построим по индукции последовательность элементов $G_1, G_2, G_3, \ldots$, удовлетворяющую следующим двум условиям:

$$1^0\ G_i=m_iG_{i+1},\quad 2^0\ \chi(G_1)/n_i\chi(G_{i+1})\quad (i=1,2,\ldots).$$

Пусть уже построены все G_i $(i\leqslant k)$; построим G_{k+1}. Из условия 2^0 следует существование элементов $\frac{1}{m_km_{k+1}\ldots m_{k+l}}G_k$ (где l — любое, $l\geqslant 0$).

Рассмотрим комплекс $\frac{1}{m_k}G_k+\mathfrak{T}$. Выделим из него максимальный элемент A. Так как

$$B=m_{k+1}m_{k+2}\ldots m_{k+l}\left(\frac{1}{m_km_{k+1}\ldots m_{k+l}}G_k\right)\in\frac{1}{m_k}G_k+\mathfrak{T}$$

и так как $m_{k+1}m_{k+2}\ldots m_{k+l}/\chi(B)$, то $m_{k+1}m_{k+2}\ldots m_{k+l}$ должно быть делителем $\chi(A)$ и, следовательно, $\chi(G_1)/n_k\chi(A)$. Элемент A можно представить в виде $A=\frac{1}{m_k}G_k+T$, где $T\in\mathfrak{T}$. Введем в рассмотрение эле-

мент $X = m_k A - G_k = m_k T$. $\chi(G_1)/n_k \chi(A)$, следовательно, по свойству 2 § 2 $\chi(G_1)/n_{k-1}\chi(m_k A)$, а так как, в свою очередь, $\chi(G_1)/n_{k-1}\chi(G_k)$, то по свойству 1 § 2 $\chi(G_1)/n_{k-1}\chi(X)$. Далее, так как $X \in \mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}$ разложима в прямую сумму групп первого ранга, то по свойству 5 § 2 должен существовать такой элемент Y, что $m_k Y = X$ и $m_k \chi(Y) = \chi(X)$, т. е. $\chi(G_1)/n_k \chi(Y)$.

Составим элемент $Z = A - Y = \frac{1}{m_k} G_k + T - Y$. Так как $\chi(G_1)/n_k \chi(A)$ и $\chi(G_1)/n_k \chi(Y)$, то и $\chi(G_1)/n_k \chi(Z)$. Далее, $m_k Z = G_k + m_k T - m_k Y = G_k + X - m_k Y = G_k$. Следовательно, можно положить $Z = G_{k+1}$.

Составим группу $\mathfrak{R} = \{G_1, G_2, \ldots\}$, ранг которой, как легко показать, равен единице. $\mathfrak{R}$ не содержит элементов конечного порядка, т. е. $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{T} = 0$. Покажем, что $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{T}\} = \mathfrak{G}$, откуда и будет следовать, что $\mathfrak{G} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{T}$. Пусть $\mathfrak{G} \ni H$, так как rang $(\mathfrak{G}/\mathfrak{T}) = 1$, то найдутся такие числа n и m, что $nG_1 = mH$. Пусть $(n, m) = d$ и $n = n'd$ и $m = m'd$. Так как G_1 максимален в $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{T}$, то по свойству 6 § 2 в $\mathfrak{G}$ должен существовать элемент $\frac{1}{m'} G_1$. Нетрудно показать, что $\chi_{\mathfrak{G}}(G_1) = \chi_{\mathfrak{R}}(G_1)$, поэтому и в $\mathfrak{R}$ должен найтись элемент X такой, что $m'X = G_1$. Отсюда $n'm'dX = m'dH$, т. е. $m'd(H - n'X) = 0$, т. е. $(H - n'X) \in \mathfrak{T}$ и $H \in n'X + \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R} + \mathfrak{T}$.

§ 4

ТЕОРЕМА. *Если $\mathfrak{T}$ — периодическая подгруппа абелевой группы $\mathfrak{G}$ и фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ разложимы в прямые суммы групп первого ранга, то сама группа $\mathfrak{G}$ разложима в прямую сумму групп первого ранга тогда и только тогда, когда в каждом классе смежности по $\mathfrak{T}$ найдется хотя бы один максимальный элемент.*

Доказательство. 1° Пусть $\mathfrak{G}$ разложима в прямую сумму групп первого ранга; тогда $\mathfrak{T}$ является прямым слагаемым $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{H}$. Возьмем произвольный класс смежности по $\mathfrak{T}$, $G + \mathfrak{T}$. $G = T_1 + H_1$, где $T_1 \in \mathfrak{T}$ и $H_1 \in \mathfrak{H}$. В этом классе $G_1 + \mathfrak{T} = H_1 + \mathfrak{T}$ элемент H_1 является максимальным. Действительно, пусть $nX = Y \in H_1 + \mathfrak{T}$, где $X = H_2 + T_2$, $Y = H_1 + T_3$ и $H_2 \in \mathfrak{H}$, а $T_2, T_3 \in \mathfrak{T}$, тогда $nH_2 + nT_2 = H_1 + T_3$ и по свойству прямой суммы $nH_2 = H_1$.

2° Рассмотрим разложение $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ в прямую сумму групп первого ранга $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{R}}_\alpha \oplus \overline{\mathfrak{R}}_\beta \oplus \ldots$ Определим в $\mathfrak{G}$ подгруппы $\mathfrak{R}_\alpha, \mathfrak{R}_\beta, \ldots$, где $\mathfrak{R}_\iota$ состоит из элементов, входящих в классы смежности по $\mathfrak{T}$, образующие $\overline{\mathfrak{R}}_\iota$. Очевидно $\mathfrak{R}_\iota \supset \mathfrak{T}$ и rang $(\mathfrak{R}_\iota/\mathfrak{T}) = 1$. Если в каждом классе

смежности по $\mathfrak{T}$ найдутся максимальные элементы, то по лемме все $\mathfrak{R}_\nu$ будут разложимы: $\mathfrak{R}_\nu = \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{S}_\nu$. Покажем, что $\mathfrak{G} = \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{S}_\alpha \oplus \mathfrak{S}_\beta \oplus \ldots$

Действительно, группа $\{\mathfrak{T}, \mathfrak{S}_\alpha, \mathfrak{S}_\beta, \ldots\}$ содержит все $\mathfrak{R}_\nu$, а следовательно, и самое группу $\mathfrak{G}$. Далее, допустим, что $T + S_{\nu_1} + S_{\nu_2} + \ldots + S_{\nu_m} = 0$, где $T \in \mathfrak{T}$, $S_{\nu_i} \in \mathfrak{S}_{\nu_i}$ и $S_{\nu_i} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда в группе $\overline{\mathfrak{G}}$ должно иметь место соответствующее соотношение $\overline{S}_{\nu_1} + \overline{S}_{\nu_2} + \ldots + \overline{S}_{\nu_m} = 0$, где $\overline{S}_{\nu_i} \in \overline{\mathfrak{R}}_{\nu_i}$ и $\overline{S}_{\nu_i} \neq 0$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{G} = \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{S}_\alpha \oplus \oplus \mathfrak{S}_\beta \oplus \ldots$, но так как rang $\mathfrak{S}_\nu = 1$ и $\mathfrak{T}$ разложима в прямую сумму групп первого ранга, то и $\mathfrak{G}$ разложима в прямую сумму групп первого ранга.

Замечание. По ходу доказательства видно, что в теореме условие существования максимальных элементов в каждом классе смежности по $\mathfrak{T}$ может быть заменено условием существования максимальных элементов лишь в тех классах смежности, которые входят в группы $\overline{\mathfrak{R}}_\nu$, являющиеся прямыми слагаемыми первого ранга в разложении фактор-группы $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{T}$.

Институт математики и механики
при Ленинградском гос. университете.

Поступило
15. XII. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Prüfer H., Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, Math. Zeitschrift, Bd. 7 (1923).

[2] Baer R., Abelian groups without elements of finite order, Duke Math. Journ., vol. 3 (1937).

[3] Ляпин Евгений, О разложении абелевых групп без кручения, имеющих конечный ранг, в прямую сумму групп первого ранга, Матем. сб., 3 (45) : 1 (1938).

[4] Некоторые результаты, имеющие отношение к данному вопросу, содержатся в работе Baer'a R., The subgroup of the elements of finite order of an Abelian group, Annals of Math., vol. 37 (1936). Один частный результат Baer'a получен иным образом Фоминым С., Über periodische Untergruppen der unendlichen Abelschen Gruppen, Матем. сб., 2 (44) : 5 (1937).

E. LIAPIN. ON THE DECOMPOSITION OF ABELIAN GROUPS INTO DIRECT SUMS OF GROUPS OF THE FIRST RANK

SUMMARY

In the present paper the question whether a given abelian group can be decomposed into a direct sum of groups of the rank 1, is reduced to the question of decomposibility of two types of abelian groups viz. torsion groups (i. e., groups having elements of a finite order only) and groups without torsion (i. e., groups all elements of which except 0 are of the infinite order). More precisely we shall give a necessary and sufficient condition for the existence of such a decomposition of an abelian group $\mathfrak{G}$, provided that its torsion subgroup $\mathfrak{T}$ and its factor group $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ can be so decomposed.

We shall say that an element $G \in \mathfrak{G}$ is divisible by n (n — a positive integer), if there exists such an element $G' \in' \mathfrak{G}$ that $nG' = G$. Consider the set of all positive integers by which G is divisible. We can easily prove that there exists a sequence a_1, a_2, ... of positive integers satisfying the following conditions: 1) G is divisible by the a_i ($i = 1, 2, \ldots$), 2) a_{i+1} is a multiple of a_i ($i = 1, 2, \ldots$), 3) if G is divisible by n, then n is a factor of an a_i. Such a sequence we shall call a characteristic sequence of G. The set of all characteristic sequences we shall call the characteristic of G and denote by $\chi(G)$. We shall say that a characteristic $\chi(G_1)$ is a divisor of $n\chi(G_2)$ $\left(\text{we write this } \chi(G_1)/n\chi(G_2)\right)$, if every divisor m of G_1 is a divisor of nl, where l is a divisor of G.

An element G belonging to a subset $\mathfrak{A}$ of $\mathfrak{G}$ will be called maximal in $\mathfrak{A}$, if its characteristic is divisible by the characteristics of all elements of $\mathfrak{A}$ or, in other words, if any divisor of any element of $\mathfrak{A}$ is a divisor of G.

LEMMA. *If* 1) *the torsion subgroup* $\mathfrak{T}$ *of a group* $\mathfrak{G}$ *can be decomposed into a direct sum of groups of the first rank*, 2) *the rank of the factor group* $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ *is* 1, *and* 3) *in every coset* $G + \mathfrak{T}$ *there exists at least one maximal element*, *then* $\mathfrak{T}$ *is a direct summand of* $\mathfrak{G}$.

Take a coset $G + \mathfrak{T}$ different from $\mathfrak{T}$ ($G \in \mathfrak{T}$); denote by G_1 its maximal element, and let $(n_1, n_2, \ldots)$ be a characteristic sequence of G_1. We can construct (inductively) a sequence $G_1, G_2, \ldots$ of elements satisfying the following conditions:

$$1)\ G_i = \frac{n_i}{h_{i-1}} G_{i+1} \quad \text{and} \quad 2)\ \chi(G_1)/n_i\chi(G_{i+1})\ (i = 1, 2, \ldots)$$

Consider now the group $\mathfrak{R} = \{G_1, G_2, \ldots\}$ whose rank is evidently 1. We can easely prove that $\mathfrak{G} = \mathfrak{T} \oplus \mathfrak{R}$.

THEOREM. *If the torsion subgroup* $\mathfrak{T}$ *of an abelian group* $\mathfrak{G}$ *and the factor group* $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ *are decomposible into direct sums of groups of the first rank, then the necessary and sufficient condition for the group* $\mathfrak{G}$ *itself to be so decomposible is that in every coset* $G+\mathfrak{T}$ $(G \in \mathfrak{G})$ *there exists at least one maximal element.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathematiqu

П. В. СОЛОВЬЕВ

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье исследуется существование периодических решений одного класса нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа. При определенных условиях доказываются теоремы существования и единственности периодических решений. Задача решается методом последовательных приближений.

Целью этой работы является доказательство некоторых теорем существования решения уравнения

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu f(Z) \tag{1}$$

при условиях, что

$$\left.\begin{aligned} &Z(x, 0) = Z(x, 1) \\ &\left.\frac{\partial Z}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial Z}{\partial t}\right|_{t=1} \qquad Z(0, t) = Z(1, t) = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Решение уравнения (1) при условиях (2) было получено Н. А. Артемьевым * в предположении, что $f(Z)$ голоморфная функция в некоторой области $\overline{D} = D(|Z| \leqslant A)$ изменения переменного Z, где A — некоторая константа. В этой работе на функцию $f(Z)$ накладываются более общие условия, именно:

$$|f'(Z_1) - f'(Z_2)| \leqslant M\,|Z_1 - Z_2|. \tag{3}$$

Доказательство теорем существования проводится методом последовательных приближений.

Пусть функция $\Phi(x, t)$ в правой части дифференциального уравнения (1) удовлетворяет условию

$$|\Phi(x_1, t_1) - \Phi(x_2, t_2)| \leqslant M_1\,|x_1 - x_2| + M_2\,|t_1 - t_2| \tag{4}$$

---

* Известия Академии Наук СССР, Серия матем. № 1, 1937.

для всех точек (x_1, t_1), (x_2, t_2), принадлежащих области $\overline{D} = D\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{pmatrix}$, и может быть представлена в виде

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(x, t) = \int_0^x \Phi_1(\xi, t)\, d\xi, \\ \text{или} \qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad [\Phi(0, t) = \Phi(1, t) = 0] \\ &\Phi(x, t) = \int_0^t \Phi_2(x, \xi)\, d\xi, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где функции $\Phi_1(x, t)$, $\Phi_2(x, t)$ суть функции ограниченной вариации по первому аргументу при любом значении $0 \leqslant t \leqslant 1$, а также — функции ограниченной вариации по второму аргументу при любом значении $0 \leqslant x \leqslant 1$ *.

Далее, функция $\Phi(x, t)$ — периодическая по t с периодом, равным единице,

$$\Phi(x, t+1) = \Phi(x, t)$$

и разлагается в ряд Фурье по синусам

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2n+1}(t) \cdot \sin(2n+1)\pi x, \tag{6}$$

где

$$\Phi_{2n+1}(t) = 2\int_0^1 \Phi(\xi, t) \cdot \sin(2n+1)\pi\xi\, d\xi. \tag{6'}$$

Все условия, которым удовлетворяет функция $\Phi(x, t)$, будем называть в дальнейшем условиями (А).

Докажем теорему:

ТЕОРЕМА I. *Дифференциальное уравнение* (1) *допускает непрерывное, вместе со своими частными производными второго порядка, решение в области* $\overline{D}$, *периодическое по аргументу* t *с периодом, равным единице, удовлетворяющее условиям* (2), *если*

1° *функция* $\Phi(x, t)$ *удовлетворяет условиям* (А),

2° $|f'(Z_1) - f'(Z_2)| \leqslant M\,|Z_1 - Z_2|$,

3° $f(Z) = -f(-Z)$; $f(0) = 0$,

4° $|\mu| < \dfrac{|a| \cdot \pi}{AN}$ (*a — любое целое нечетное число*),

где $N = \sup f'(Z)$ *в некоторой конечной области изменения переменной* Z *и*

$$A = \sup_{(0 \leqslant t \leqslant 1)} \left[\int_0^t d\xi \int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x \cdot \sin(2n+1)\pi\eta \cdot \sin(2n+1)\pi a(t-\xi)}{2n+1} \right| d\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^1 d\xi \int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x \cdot \sin(2n+1)\pi\eta \cdot \cos(2n+1)\pi a\left(t - \xi + \frac{1}{2}\right)}{(2n+1) \cdot \sin\dfrac{(2n+1)\pi a}{2}} \right| d\eta \right].$$

* В дальнейшем для краткости будем их называть просто функциями ограниченной вариации по первому и по второму аргументам.

Для доказательства этой теоремы применим метод последовательных приближений. Будем искать начальное приближение $Z_0(x, t)$, которое назовем нулевым приближением, как решение уравнения

$$\frac{\partial^2 Z_0}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} = \Phi(x, t), \tag{7}$$

удовлетворяющее условиям (2).

Как нетрудно убедиться, решение $Z_0(x, t)$ будет вида

$$Z_0(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T^0_{2n+1}(t) \cdot \sin(2n+1)\pi x, \tag{8}$$

где

$$T^0_{2n+1}(t) = \frac{2}{a\pi\,(2n+1)} \int_0^t d\xi \int_0^1 \Phi(\eta, \xi) \cdot \sin(2n+1)\pi\eta \cdot \sin(2n+1)\pi a(t-\xi) d\eta +$$

$$+ \frac{1}{a\pi(2n+1)\cdot \sin\frac{(2n+1)\pi a}{2}} \int_0^1 d\xi \int_0^1 \Phi(\eta, \xi) \cdot \sin(2n+1)\pi\eta \times$$

$$\times \cos(2n+1)\pi a\left(t - \xi + \frac{1}{2}\right) d\eta. \tag{9}$$

Покажем, что ряд (8) абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{D}$. Для этого предварительно рассмотрим некоторые свойства функции $\Phi_{2n+1}(t)$ при любом фиксированном n.

$$\left|\Phi_{2n+1}(t_1) - \Phi_{2n+1}(t_2)\right| = 2\left|\int_0^1 [\Phi(\eta, t_1) - \Phi(\eta, t_2)] \cdot \sin(2n+1)\pi\eta\, d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^1 |\Phi(\eta, t_1) - \Phi(\eta, t_2)|\, d\eta \leqslant 2M_2\,|t_1 - t_2|,$$

т. е. функция $\Phi_{2n+1}(t)$ есть функция непрерывная и ограниченной вариации. Далее, функция $\Phi_{2n+1}(t)$ является коэффициентом Фурье от функции $\Phi(x, t)$, удовлетворяющей условиям (А); следовательно*

$$|\Phi_{2n+1}(t)| \leqslant \frac{B_0}{(2n+1)^2}, \tag{10}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} &\left|\int_0^t \Phi_{2n+1}(\xi) \cdot \sin(2n+1)\pi a(t-\xi)\, d\xi\right| \leqslant \frac{B_1}{(2n+1)^3}, \\ &\left|\int_0^1 \Phi_{2n+1}(\xi) \cdot \cos(2n+1)\pi a\left(t - \xi + \frac{1}{2}\right) d\xi\right| \leqslant \frac{B_2}{(2n+1)^3}, \end{aligned}\right\} \tag{10'}$$

где B_0, B_1, B_2 — константы, не зависящие от индекса n.

Теперь докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда

$$\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} = -\pi^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2\, T^0_{2n+1}(t) \cdot \sin(2n+1)\pi x, \tag{10''}$$

полученного путем формального дифференцирования ряда (8) почленно два раза по переменному x.

---

* См. Стеклов В. А., Основные задачи матем. физики, ч. I, стр. 17, 1922.

Ряд, полученный из ряда (13) почленным дифференцированием два раза по x,

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} = -\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 T^1_{2n+1}(t) \cdot \sin(2n+1)\pi x, \tag{13'}$$

абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{D}$. Действительно,

$$\left|\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2}\right| = \frac{\pi}{|a|}\left|\sum_{n=0}^{\infty} 2(2n+1)\cdot\sin(2n+1)\pi x \int_0^t d\sigma \int_0^1 [\Phi(\xi,\sigma) + \right.$$
$$+ \mu f(Z_0)]\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\,d\xi +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\sin(2n+1)\pi x}{\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2}} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 [\Phi(\xi,\sigma) + \mu f(Z_0)] \times$$
$$\left.\times \sin(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi\right| =$$
$$= \frac{1}{|a|}\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sin(2n+1)\pi x}{1} \int_0^t d\sigma \int_0^1 \left[\Phi_1(\xi,\sigma) + \mu f'(Z_0)\cdot\frac{\partial Z_0}{\partial\xi}\right] \times\right.$$
$$\times\cos(2n+1)\pi\xi\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\,d\xi +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2}} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \left[\Phi_1(\xi,\sigma) + \mu f'(Z_0)\cdot\frac{\partial Z_0}{\partial\xi}\right] \times$$
$$\left.\times\cos(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{|a|}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^t d\sigma \int_0^1 \left[\Phi_1(\xi,\sigma) + \mu f'(Z_0)\frac{\partial Z_0}{\partial\xi}\right] \times\right.$$
$$\left.\times\cos(2n+1)\pi\xi\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\,d\xi\right| +$$
$$+\frac{1}{|a|}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 d\sigma \int_0^1 \left[\Phi_1(\xi,\sigma) + \mu f'(Z_0)\cdot\frac{\partial Z_0}{\partial\xi}\right] \times\right.$$
$$\left.\times\cos(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi\right|.$$

Так как функция $f'(Z)$ удовлетворяет условию 2° теоремы I и $Z_0(x, t)$ допускает непрерывные частные производные второго порядка, то $f'(Z_0)\cdot\frac{\partial Z_0}{\partial x} = \psi_1(x, t)$ есть функция непрерывная в области $\overline{D}$ и ограниченной вариации по первому и второму аргументам; функция $\Phi_1(x, t)$ — ограниченной вариации по условию (A), следовательно,

$$\left|\int_0^t d\sigma \int_0^1 \left[\Phi_1(\xi,\sigma) + \mu f'(Z_0)\cdot\frac{\partial Z_0}{\partial\xi}\right]\cdot\cos(2n+1)\pi\xi \times\right.$$
$$\left.\times\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\,d\xi\right| \leqslant \frac{B_3}{(2n+1)^2},$$
$$\left|\int_0^1 d\sigma \int_0^1 \left[\Phi_1(\xi,\sigma) + \mu f'(Z_0)\cdot\frac{\partial Z_0}{\partial\xi}\right]\cdot\cos(2n+1)\pi\xi \times\right.$$
$$\left.\times\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi\right| \leqslant \frac{B_4}{(2n+1)^2},$$

где B_3, B_4 — некоторые постоянные, не зависящие от индекса n.

Отсюда

$$\left|\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2}\right| \leqslant \frac{2}{|a|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_3}{(2n+1)^2}+\frac{1}{|a|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_4}{(2n+1)^2}=\frac{2B_3+B_4}{|a|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

т. е. ряд (13') абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{D}$.

Рассуждая по аналогии с предыдущим доказательством, легко показать, что и ряд

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^2 T_{2n+1}^0(t)}{dt^2}\cdot\sin(2n+1)\pi x$$

также абсолютно и равномерно сходится в той же области.

Итак, функция $Z_1(x, t)$ — непрерывна в области $\overline{D}$ вместе с частными производными второго порядка. Зная первое приближение, ищем второе $Z_2(x, t)$ и т. д.

Докажем теперь, что существует предел $Z_k(x, t)$, когда $k\to\infty$ (Z_k — k-ое приближение), и этот предел

$$Z=\lim_{k\to\infty} Z_k$$

дает решение уравнения (1).

Для доказательства существования предела $Z(x, t)$ составим ряд

$$Z(x, t)=Z_0(x, t)+[Z_1(x, t)-Z_0(x, t)]+ +\ldots+[Z_k(x, t)-Z_{k-1}(x, t)]+\ldots \tag{14}$$

и исследуем его. Рассмотрим общий член этого ряда

$$Z_k-Z_{k-1}=\sum_{n=0}^{\infty}[T_{2n+1}^{k}(t)-T_{2n+1}^{k-1}(t)]\cdot\sin(2n+1)\pi x=$$

$$=\frac{2\mu}{\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)}\int_0^t d\sigma\int_0^1[f(Z_{k-1})-f(Z_{k-2})]\times$$

$$\times\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\,d\xi+$$

$$+\frac{\mu}{\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2}}\int_0^1 d\sigma\int_0^1[f(Z_{k-1})-f(Z_{k-2})]\times$$

$$\times\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi=$$

$$=\frac{2\mu}{\pi a}\int_0^t d\sigma\int_0^1[f(Z_{k-1})-f(Z_{k-2})]\times$$

$$\times\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x\cdot\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)}{2n+1}\right)d\xi+$$

$$+\frac{\mu}{\pi a}\int_0^1 d\sigma\int_0^1[f(Z_{k-1})-f(Z_{k-2})]\times$$

$$\times\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x\cdot\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2}}\right)d\xi \tag{15}$$

$$(k=1, 2, \ldots).$$

Знаки суммирования и интегрирования можно менять местами. Обозначая через $K_1(x, t; \xi, \sigma)$ ряд, стоящий под знаком первого интеграла, и через $K_2(x, t; \xi, \sigma)$ ряд под знаком второго интеграла, получим

$$Z_k - Z_{k-1} = \frac{2\mu}{a\pi} \int_0^t d\sigma \int_0^1 [f(Z_{k-1}) - f(Z_{k-2})] \cdot K_1(x, t; \xi, \sigma)\, d\xi +$$

$$+ \frac{\mu}{a\pi} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 [f(Z_{k-1}) - f(Z_{k-2})] \cdot K_2(x, t; \xi, \sigma)\, d\xi. \qquad (16)$$

Функции $K_1(x, t; \xi, \sigma)$, $K_2(x, t; \xi, \sigma)$ абсолютно интегрируемы, т. е. интегралы *

$$\int_0^t d\sigma \int_0^1 |K_1(x, t; \xi, \sigma)|\, d\xi; \quad \int_0^1 d\sigma \int_0^1 |K_2(x, t; \xi, \sigma)|\, d\xi$$

существуют.

Функции $Z_0(x, t)$, $Z_1(x, t)$ непрерывны в области $\overline{D}$, следовательно, можно найти такое число L, что

$$|Z_0| \leqslant L, \quad |Z_1 - Z_0| \leqslant L$$

для любой точки (x, t), принадлежащей области $\overline{D}$.

Полагая в формуле (16) $k = 2$, получим

$$|Z_2 - Z_1| = \left|\frac{\mu}{\pi a}\right| 2 \left|\left[\int_0^t d\sigma \int_0^1 [f(Z_1) - f(Z_0)] \cdot K_1(x, t; \xi, \sigma)\, d\xi +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^1 d\sigma \int_0^1 [f(Z_1) - f(Z_0)] \cdot K_2(x, t; \xi, \sigma)\, d\xi \right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\mu}{\pi a}\right| \left[2 \int_0^t d\sigma \int_0^1 |f(Z_1) - f(Z_0)| \cdot |K_1(x, t; \xi, \sigma)|\, d\xi +\right.$$

$$\left. + \int_0^1 d\sigma \int_0^1 |f(Z_1) - f(Z_0)| \cdot |K_2(x, t; \xi, \sigma)|\, d\xi \right] \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\mu}{a\pi}\right| \left[2 \int_0^t d\sigma \int_0^1 N |Z_1 - Z_0| \cdot |K_1(x, t; \xi, \sigma)|\, d\xi +\right.$$

$$\left. + \int_0^1 d\sigma \int_0^1 N |Z_1 - Z_0| \cdot |K_2(x, t; \xi, \sigma)|\, d\xi \right] \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\mu}{a}\right| \frac{NLA}{\pi}.$$

Поступая точно так же, получим, что

$$|Z_3 - Z_2| \leqslant \left(\left|\frac{\mu}{a}\right| \frac{1}{\pi} \right)^2 N^2 A^2 L$$

и т. д.

$$|Z_k - Z_{k-1}| \leqslant \left(\left|\frac{\mu}{a}\right| \frac{1}{\pi} NA \right)^{k-1} \cdot L.$$

* См. стр. 37 цитированной статьи А. Н. Артемьева.

Таким образом, мажорантным рядом по отношению к ряду (14) будет ряд вида

$$L + L + L\left|\frac{\mu}{\pi a}\right| AN + \ldots + L\left|\frac{\mu}{\pi a}\right|^k A^k N^k + \ldots \tag{17}$$

Ряд (17) сходится, следовательно ряд (14) абсолютно и равномерно сходится и его можно записать в виде

$$Z(x, t) = \frac{2}{a\pi}\int_0^t d\sigma \int_0^1 [\Phi(\xi, \sigma) + \mu f(Z)] \cdot K_1(x, t; \xi, \sigma)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{a\pi}\int_0^1 d\sigma \int_0^1 [\Phi(\xi, \sigma) + \mu f(Z)] \cdot K_2(x, t; \xi, \sigma)\, d\xi. \tag{18}$$

Докажем теперь абсолютную и равномерную сходимость ряда

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z_0}{\partial x} + \left[\frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial Z_0}{\partial x}\right] + \ldots + \left[\frac{\partial Z_k}{\partial x} - \frac{\partial Z_{k-1}}{\partial x}\right] + \ldots \tag{19}$$

в области $\bar{D}$ или, что то же самое, ряда

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, T_{2n+1}^0(t) \cdot \cos(2n+1)\pi x +$$

$$+ \pi \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\left[T_{2n+1}^1(t) - T_{2n+1}^0(t)\right] \cdot \cos(2n+1)\pi x +$$

$$+ \ldots + \pi \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\left[T_{2n+1}^k(t) - T_{2n+1}^{k-1}(t)\right] \cdot \cos(2n+1)\pi x + \ldots =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{a} \int_0^t d\sigma \int_0^1 \Phi(\xi, \sigma) \cdot \sin(2n+1)\pi\xi \times$$

$$\times \sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{a \sin\frac{(2n+1)\pi a}{2}} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \Phi(\xi, \sigma) \cdot \sin(2n+1)\pi\xi \times$$

$$\times \cos(2n+1)\pi a\left(t - \sigma + \frac{1}{2}\right) d\xi +$$

$$+ \ldots + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{a} \int_0^t d\sigma \int_0^1 [f(Z_k) - f(Z_{k-1})] \times$$

$$\times \sin(2n+1)\pi\xi \cdot \sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\, d\xi +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2}}\int_0^1 d\sigma\int_0^1[f(Z_k)-f(Z_{k-1})]\times$$

$$\times\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi+\ldots \qquad (19')$$

(считая $f(Z_{-1})\equiv 0$).

Для этого достаточно, очевидно, доказать абсолютную и равномерную сходимость ряда

$$\frac{2\mu}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{1}\int_0^t d\sigma\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{\infty}[f(Z_k)-f(Z_{k-1})]\right)\times$$

$$\times\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)d\xi+$$

$$+\frac{\mu}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2}}\int_0^1 d\sigma\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{\infty}[f(Z_k)-f(Z_{k-1})]\right)\times$$

$$\times\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi, \qquad (20)$$

который можно получить из ряда (19′), изменяя порядок суммирования и интегрирования.

Выражение $\sum_{k=0}^{\infty}[f(Z_k)-f(Z_{k-1})]$, стоящее под знаком интеграла в ряде (20), есть ряд абсолютно и равномерно сходящийся и

$$\sum_{k=0}^{\infty}[f(Z_k)-f(Z_{k-1})]=f(Z).$$

Далее функции $K_1(x, t; \xi, \sigma)$, $K_2(x, t; \xi, \sigma)$ суть функции ограниченной вариации относительно переменной x при любых значениях $\left(0\leqslant\begin{pmatrix}\xi\\ t\\ \sigma\end{pmatrix}\leqslant 1\right)$ и относительно переменной t при любых значениях $\left(0\leqslant\begin{pmatrix}x\\ \xi\\ \sigma\end{pmatrix}\leqslant 1\right)$. Следовательно, непрерывная функция $Z(x, t)$ в области $\overline{D}$, представленная в виде формулы (18), будет функция ограниченной вариации по первому и второму аргументам.

Принимая во внимание сделанные замечания, ряд (20) запишется в виде

$$I_1 = \frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\cos(2n+1)\pi x\int_0^t d\sigma\int_0^1\Big[\Phi(\xi,\sigma)+\mu f(Z)\Big]\times$$
$$\times\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2}}\int_0^1 d\sigma\int_0^1\Big[\Phi(\xi,\sigma)+\mu f(Z)\Big]\times$$
$$\times\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi.$$

Оценивая по модулю сумму этого ряда, будем иметь

$$\left|I_1\right|\leqslant\frac{2}{|a|}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^t d\sigma\int_0^1\Big[\Phi(\xi,\sigma)+\mu f(Z)\Big]\times\right.$$
$$\left.\times\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\,d\xi\right|+$$
$$+\frac{1}{|a|}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 d\sigma\int_0^1\Big[\Phi(\xi,\sigma)+\mu f(Z)\Big]\times\right.$$
$$\left.\times\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi\right|.$$

Так как функция $\Phi(\xi,\sigma)$ по условию — ограниченной вариации по первому и второму аргументам и $f(Z)$ удовлетворяет условию 3° теоремы I, то,

$$\Phi(\xi,\sigma)+\mu f(Z)=\psi(\xi,\sigma)$$

будет функцией ограниченной вариации по первому и второму аргументам. Следовательно,

$$\left|\int_0^t d\sigma\int_0^1[\Phi(\xi,\sigma)+\mu f(Z)]\cdot\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\,d\xi\right|\leqslant\frac{C_1}{(2n+1)^2},$$

$$\left|\int_0^1 d\sigma\int_0^1[\Phi(\xi,\sigma)+\mu f(Z)]\cdot\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi\right|\leqslant\frac{C_2}{(2n+1)^2},$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные, не зависящие от n. Отсюда следует, что

$$|I_1|\leqslant\frac{2}{|a|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{|a|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_2}{(2n+1)^2}=\frac{2C_1+C_2}{|a|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

т. е. ряд (20), а следовательно, и ряд (19′) абсолютно и равномерно сходятся.

Рассуждая, как в предыдущем случае, легко показать, что и ряд

$$\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial Z_0}{\partial t}+\left[\frac{\partial Z_1}{\partial t}-\frac{\partial Z_0}{\partial t}\right]+\ldots+\left[\frac{\partial Z_k}{\partial t}-\frac{\partial Z_{k-1}}{\partial t}\right]+\ldots \qquad (20')$$

абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{D}$.

Таким образом функция $Z(x, t)$ есть непрерывная функция вместе с частными производными первого порядка в указанной области и $\frac{\partial Z}{\partial x}$ можно записать в виде:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\cos(2n+1)\pi x\int_0^t d\sigma\int_0^1\left[\Phi(\xi, \sigma)+\mu f(Z)\right]\times$$

$$\times\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2}}\int_0^1 d\sigma\int_0^1\left[\Phi(\xi,\sigma)+\mu f(Z)\right]\times$$

$$\times\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi=$$

$$=\frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{\pi(2n+1)}\int_0^t d\sigma\int_0^1\left[\Phi_1(\xi, \sigma)+\mu f'(Z)\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right]\times$$

$$\times\cos(2n+1)\pi\xi\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{\pi(2n+1)\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2}}\int_0^1 d\sigma\int_0^1\left[\Phi_1(\xi, \sigma)+\mu f'(Z)\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right]\times$$

$$\times\cos(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi=$$

$$=\frac{2}{\pi a}\int_0^t d\sigma\int_0^1\left[\Phi_1(\xi, \sigma)+\mu f'(Z)\cdot\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right]\times$$

$$\times\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x\cdot\cos(2n+1)\pi\xi\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)}{2n+1}\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{a\pi}\int_0^1 d\sigma\int_0^1\left[\Phi_1(\xi, \sigma)+\mu f'(Z)\cdot\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right]\times$$

$$\times\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x\cdot\cos(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2}}\right)d\xi.$$

Обозначая ряд, стоящий под знаком первого интеграла, через $K_3(x, t; \xi, \sigma)$ и ряд под знаком второго интеграла через $K_4(x, t; \xi, \sigma)$, получим

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{2}{a\pi}\int_0^t d\sigma\int_0^1\left[\Phi_1(\xi,\sigma)+\mu f'(Z)\cdot\frac{\partial Z}{\partial\xi}\right]\cdot K_3(x,\,t;\,\xi,\,\sigma)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{a\pi}\int_0^1 d\sigma\int_0^1\left[\Phi_1(\xi,\sigma)+\mu f'(Z)\cdot\frac{\partial Z}{\partial\xi}\right]\cdot K_4(x,\,t;\,\xi,\,\sigma)\,d\xi. \qquad (21)$$

Функции $K_3(x,\,t;\,\xi,\,\sigma)$ и $K_4(x,\,t;\,\xi,\,\sigma)$, так же как и функции $K_1(x,\,t;\,\xi,\,\sigma)$ и $K_2(x,\,t;\,\xi,\,\sigma)$, суть функции ограниченной вариации относительно переменных x и t; следовательно, функция $\frac{\partial Z}{\partial x}$, представленная в виде формулы (21), будет функцией ограниченной вариации по первому и второму аргументам.

Рассмотрим теперь ряд

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2}+\left[\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2}\right]+\ldots+\left[\frac{\partial^2 Z_k}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 Z_{k-1}}{\partial x^2}\right]+\ldots=$$

$$=-\frac{2\pi}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sin(2n+1)\pi x\int_0^t d\sigma\int_0^1[\Phi(\xi,\sigma)+\mu f(Z)]\times$$

$$\times\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\,d\xi-$$

$$-\frac{\pi}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\sin(2n+1)\pi x}{\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2}}\int_0^1 d\sigma\int_0^1[\Phi(\xi,\sigma)+\mu f(Z)]\times$$

$$\times\sin(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi=$$

$$=-\frac{2\pi}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\sin(2n+1)\pi x\int_0^t d\sigma\int_0^1\left[\Phi_1(\xi,\sigma)+\mu f'(Z)\frac{\partial Z}{\partial\xi}\right]\times$$

$$\times\cos(2n+1)\pi\xi\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2}}\int_0^1 d\sigma\int_0^1\left[\Phi_1(\xi,\sigma)+\mu f'(Z)\frac{\partial Z}{\partial\xi}\right]\times$$

$$\times\cos(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi. \qquad (22)$$

Оценивая его сумму по модулю, получим

$$\left|\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right|\leqslant\frac{2}{|a|}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^t d\sigma\int_0^1\left[\Phi_1(\xi,\,\sigma)+\mu f'(Z)\frac{\partial Z}{\partial\xi}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\cos(2n+1)\pi\xi\cdot\sin(2n+1)\pi a(t-\sigma)\,d\xi\right|+$$

$$+\frac{1}{|a|}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_0^1 d\sigma\int_0^1\left[\Phi_1(\xi,\,\sigma)+\mu f'(Z)\frac{\partial Z}{\partial\xi}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\cos(2n+1)\pi\xi\cdot\cos(2n+1)\pi a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)d\xi\right|.$$

Так как функции $\Phi_1(\xi, \sigma)$ и $f'(Z)\frac{\partial Z}{\partial \xi}$ суть функции ограниченной вариации, то

$$\left| \int_0^t d\sigma \int_0^1 \left[\Phi_1(\xi, \sigma) + \mu f'(Z) \cdot \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right] \cdot \cos(2n+1)\pi\xi \cdot \cos(2n+1)\pi a(t-\sigma)\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3}{(2n+1)^2},$$

$$\left| \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \left[\Phi_1(\xi, \sigma) + \mu f'(Z) \cdot \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right] \cdot \cos(2n+1)\pi\xi \cdot \cos(2n+1)\pi a\left(t - \sigma + \frac{1}{2}\right) d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_4}{(2n+1)^2},$$

где C_3 и C_4 не зависят от n. Следовательно,

$$\left| \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right| \leqslant \frac{2C_3 + C_4}{|a|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

В силу сходимости числового ряда, стоящего в правой части этого неравенства, ряд (22) абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{D}$. Абсолютная и равномерная сходимость ряда

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Z_0}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial^2 Z_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Z_0}{\partial t^2} \right] + \ldots + \left[\frac{\partial^2 Z_k}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 Z_{k-1}}{\partial t^2} \right] + \ldots$$

доказывается аналогично.

Теорема I доказана.

ТЕОРЕМА II. *Дифференциальное уравнение* (1) *допускает непрерывное решение в области* $\overline{D}$, *вместе с частными производными второго порядка, периодическое по аргументу* t *с периодом, равным единице, удовлетворяющее условиям* (2) *и единственное* *, *если*

1° *функция* $\Phi(x, t)$ *удовлетворяет условиям* (A),

2° $|f'(Z_1) - f'(Z_2)| \leqslant M |Z_1 - Z_2|$,

3° $f(Z) = -f(-Z)$; $f(0) = 0$,

4° $|\mu| < \frac{|a|\pi}{NA}$.

Будем доказывать эту теорему методом от противного. Допустим, что существует два различных решения $Z(x, t)$ и $V(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющих условиям (2).

Разность $Z - V = \psi(x, t)$ будет решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \mu [f(Z) - f(V)]$$

* Решение единственное среди класса функций $\{Z\}$, разложимых в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по синусам.

при тех же условиях (2). Как установлено, решение этого уравнения будет также решением интегрального уравнения

$$\psi(x, t) = \frac{2\mu}{a\pi}\int_0^t d\sigma \int_0^1 [f(Z) - f(V)] K_1(x, t; \xi, \sigma) d\xi +$$

$$+ \frac{\mu}{\pi a}\int_0^1 d\sigma \int_0^1 [f(Z) - f(V)] K_2(x, t; \xi, \sigma) d\xi.$$

Отсюда

$$|\psi| = |Z - V| \leqslant 2\left|\frac{\mu}{\pi a}\right| \int_0^t d\sigma \int_0^1 N |Z - V| \cdot |K_1(x, t; \xi, \sigma)| d\xi +$$

$$+ \left|\frac{\mu}{\pi a}\right| \int_0^1 d\sigma \int_0^1 N |Z - V| \cdot |K_2(x, t; \xi, \sigma)| d\xi \leqslant \left|\frac{\mu}{a}\right| NA \max |Z - V|$$

или

$$\max |Z - V| \leqslant \left|\frac{\mu}{\pi a}\right| NA \max |Z - V|,$$

т. е.

$$|\mu| \geqslant \frac{|a|\pi}{NA}.$$

Получили противоречие, следовательно,

$$\max |Z - V| = 0$$

или

$$Z \equiv V,$$

что и доказывает единственность решения.

Поступило
27.XI.1938.

P. SOLOVIEFF. QUELQUES REMARQUES SUR LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES DU TYPE HYPERBOLIQUE

RÉSUMÉ

Dans cet article je cherche les solutions périodiques de l'équation différentielle *

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu f(Z), \tag{1}$$

les conditions limites étant

$$\left.\begin{aligned} Z(x, 0) &= Z(x, 1) \qquad & Z(0, t) &= 0, \\ \left.\frac{\partial Z}{\partial t}\right|_{t=0} &= \left.\frac{\partial Z}{\partial t}\right|_{t=1} \qquad & Z(1, t) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Je démontre que l'équation différentielle (1) admet dans le domaine

* Ce problème limite a été résolue par N. Artemieff moyennant une méthode tout à fait distincte de celle de l'auteur, Известия Ак. Наук СССР, Серия матем., № 1, 1937.

$\overline{D} = D \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{pmatrix}$ une solution continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, périodique par rapport à l'argument t de période 1 satisfaisant aux conditions (2), si:

1° la fonction $\Phi(x, t)$ satisfait aux conditions (A) *,

2° $|f'(Z_1) - f'(Z_2)| \leqslant M \, |Z_1 - Z_2|$,

3° $f(Z) = -f(-Z)$; $f(0) = 0$,

4° $|\mu| < \frac{|a| \pi}{NA}$, où a est un nombre entier impair arbitraire; $N = \sup |f'(Z)|$ dans un domaine borné de la variation de la variable Z;

$$A = 2 \sup \left[\int_0^t d\sigma \int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n+1) \pi x \cdot \sin (2n+1) \pi \xi \cdot \sin (2n+1) \pi a (t - \sigma)}{2n+1} \right| d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n+1) \pi x \cdot \sin (2n+1) \pi \xi \cdot \cos (2n+1) \pi a \left(t - \sigma + \frac{1}{2} \right)}{(2n+1) \sin \frac{(2n+1) \pi a}{2}} \right| d\xi \right]_{(0 \leqslant t \leqslant 1)}$$

Ensuite je démontre que cette solution est unique (théorème II) dans la classe des fonctions $\{Z\}$, développables en série de Fourier de sinus absolument et uniformément convergente.

---

* Voir page 150 de cet article.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Série mathématique

М. А. НАЙМАРК

О СТРУКТУРЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье даны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы линейное многообразие, плотное в гильбертовом пространстве, было областью определения некоторого самосопряженного оператора. Отсюда получается ряд следствий для таких многообразий.

В настоящей статье изложены некоторые условия, необходимые и достаточные для того, чтобы линейное многообразие L, плотное в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$, могло быть областью определения самосопряженного оператора. В частности, решается в положительном смысле вопрос, поставленный в статье М. М. Гринблюма ([2]). Кроме того, выделены некоторые факты (впрочем, очень простые), верные не только для гильбертова, но и для любого нормированного пространства типа (B) ([3]).

Определение. Линейное многообразие L, плотное в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, будем называть H-многообразием, если существует самосопряженный оператор с областью определения $\mathfrak{H}$.

Отметим, что L уже будет H-многообразием, если существует замкнутый линейный оператор A с областью определения L. Именно, по теореме J. v. Neumann'a ([4]) оператор $H=\sqrt{A^*A}$ — самосопряженный с областью определения L.

В дальнейшем мы воспользуемся еще следующим предложением, принадлежащим K. Friedrichs'y ([5]):

Пусть L — линейное многообразие, плотное в $\mathfrak{H}$, а $(f, g)_1$ — скалярное произведение, определенное в L и такое, что

$$|f|_1 \geqslant |f|, \quad f \in L, \quad |f|_1 = (f, f)_1^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда существует положительный самосопряженный оператор A с областью определения $L_1 \subset L$, удовлетворяющий условию

$$(Af, g) = (f, g)_1, \quad f \in L_1, \quad g \in L.$$

* По поводу всех понятий, относящихся к гильбертову пространству, см., например, Stone ([1]).

Приведем доказательство этой теоремы, данное Friedrichs'ом, но будем при этом пользоваться нашими обозначениями. Положим

$$L(f)=(f_0, f) \quad f_0 \in \mathfrak{H}, \quad f \in L.$$

Тогда

$$|L(f)| \leqslant |f_0| \cdot |f| \leqslant |f_0| \cdot |f|_1,$$

т. е. $L(f)$ — линейный функционал в гильбертовом пространстве L (относительно $(f, g)_1$); поэтому, по теореме F. Riesz'a (6), существует вектор $g_0 \in L$ и только один, такой, что

$$(f_0, f)=L(f)=(g_0, f)_1, \tag{1}$$

причем

$$|g_0|_1 \leqslant |f_0|. \tag{2}$$

Положим

$$Bf_0=g_0;$$

очевидно, B — линейный оператор, определенный во всем $\mathfrak{H}$ и с областью изменения $L_1 \subset L$, причем в силу

$$|Bf_0|=|g_0| \leqslant |g_0|_1 \leqslant |f_0|$$

B ограничен в $\mathfrak{H}$. Кроме того, по определению B,

$$(f, g)=(Bf, g)_1, \quad f \in \mathfrak{H}, \quad g \in L, \tag{3}$$

следовательно, также

$$(g, f)=(g, Bf)_1, \quad f \in \mathfrak{H}, \quad g \in L;$$

поэтому для $f \in \mathfrak{H}$, $g \in \mathfrak{H}$

$$(Bf, g)=(Bf, Bg)_1=(f, Bg),$$

т. е. B — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$. Так как

$$(Bf, f)=(Bf, Bf)_1=|Bf|_1 \geqslant 0,$$

то B положителен; далее, из $Bf_0=0$ следует

$$(f_0, f)=(Bf_0, f)_1=0, \quad f \in L,$$

а так как L плотно в $\mathfrak{H}$, то $f_0=0$. Таким образом, B^{-1} существует в L_1, L_1 плотно в $\mathfrak{H}$ и B^{-1} — положительный самосопряженный оператор с областью определения L_1; кроме того, (3) можно переписать в виде

$$(B^{-1}\varphi, g)=(\varphi, g)_1 \quad \varphi=Bf \in L_1, \quad g \in L_2. \tag{4}$$

Поэтому оператор $A=B^{-1}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Friedrichs'a.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы линейное, плотное в $\mathfrak{H}$ многообразие L было H-многообразием, необходимо и достаточно, чтобы в L существовало скалярное произведение $(f, g)_1$, удовлетворяющее условиям:*

1° $|f| \leqslant |f|_1 \quad (|f|=(f, f)^{\frac{1}{2}}, \quad |f|_1=(f, f)_1^{\frac{1}{2}}, \quad f \in L)$;

2° *L полно относительно $|f|_1$.*

Доказательство. Необходимость почти очевидна. В самом деле, пусть H — самосопряженный оператор с областью определения L. Положим

$$(f, g)_1 = (Hf, Hg) + (f, g), \quad f, g \in L,$$

тогда

$$|f|_1^2 = |Hf|^2 + |f|^2,$$

и условие 1° выполнено. Далее, из

$$|f_n - f_m|_1 \to 0, \quad n, m \to \infty, \quad f_n, f_m \in L$$

следует

$$|f_n - f_m| \to 0, \quad |Hf_n - Hf_m| \to 0.$$

В силу замкнутости H существует $f_0 \in L$ такой, что

$$|f_n - f_0| \to 0, \quad |Hf_n - Hf_0| \to 0, \quad n \to \infty,$$

следовательно,

$$|f_n - f_0|_1^2 = |f_n - f_0|^2 + |Hf_n - Hf_0|^2 \to 0, \quad n \to \infty$$

и 2° также выполнено.

Пусть, обратно, $(f, g)_1$ удовлетворяет 1°, 2°, и пусть A, B — операторы, фигурирующие в доказательстве теоремы Friedrichs'а. Положим $H = \sqrt{B^{-1}} = \sqrt{A}$, так что $H^2 = B^{-1}$; для $f \in L_1$ вектора Hf, $H^2 f = B^{-1} f$ имеют смысл и

$$|Hf|^2 = (Hf, Hf) = (H^2 f, f) = (B^{-1} f, f) = (f, f)_1 = |f|_1^2.$$

Рассмотрим теперь B только на L; в силу 1°, (2) и (3)

$$|Bf|_1 \leqslant |f| \leqslant |f|_1, \quad (Bf, g)_1 = (f, g) = (f, Bg)_1, \quad f, g \in L;$$

поэтому B — ограниченный самосопряженный оператор в L (относительно $(f, g)_1$).

Так как из $Bf = 0$ следует $f = 0$, то его область изменения на L

$$L_2 = BL \subset B\mathfrak{H} = L_1$$

плотна в L (относительно $(f, g)_1$); поэтому и L_1 плотно в L (относительно $(f, g)_1$).

Пусть теперь f_0 — произвольный элемент из L. В силу только что сказанного существует последовательность $f_n \in L_1$ такая, что $|f_n - f_0|_1 \to 0$, $n \to +\infty$. Но тогда также

$$|f_n - f_0| \to 0, \quad |Hf_n - Hf_m| = |f_n - f_m|_1 \to 0, \quad n, m \to \infty,$$

следовательно, в силу замкнутости H, Hf_0 имеет смысл. Итак, все L входит в область определения H.

Пусть H_0 — оператор, равный H и рассматриваемый только на L; тогда H_0 — замкнутый оператор. В самом деле, из

$$|f_n - f_0| \to 0, \quad |H_0 f_n - g_0| \to 0, \quad n \to \infty, \quad f_n \in L \tag{5}$$

следует

$$|f_n - f_m|_1 = |H_0 f_n - H_0 f_m| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Так как L полно относительно $|f|_1$, то существует элемент $h_0 \in L$ такой, что

$$|f_n - h_0|_1 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Приведем доказательство этой теоремы, данное Friedrichs'ом, но будем при этом пользоваться нашими обозначениями. Положим

$$L(f)=(f_0, f)\quad f_0\in\mathfrak{H},\quad f\in L.$$

Тогда

$$|L(f)|\leqslant|f_0|\cdot|f|\leqslant|f_0|\cdot|f|_1,$$

т. е. $L(f)$ — линейный функционал в гильбертовом пространстве L (относительно $(f, g)_1$); поэтому, по теореме F. Riesz'a (6), существует вектор $g_0\in L$ и только один, такой, что

$$(f_0, f)=L(f)=(g_0, f)_1, \tag{1}$$

причем

$$|g_0|_1\leqslant|f_0|. \tag{2}$$

Положим

$$Bf_0=g_0;$$

очевидно, B — линейный оператор, определенный во всем $\mathfrak{H}$ и с областью изменения $L_1\subset L$, причем в силу

$$|Bf_0|=|g_0|\leqslant|g_0|_1\leqslant|f_0|$$

B ограничен в $\mathfrak{H}$. Кроме того, по определению B,

$$(f, g)=(Bf, g)_1,\quad f\in\mathfrak{H},\quad g\in L, \tag{3}$$

следовательно, также

$$(g, f)=(g, Bf)_1,\quad f\in\mathfrak{H},\quad g\in L;$$

поэтому для $f\in\mathfrak{H}$, $g\in\mathfrak{H}$

$$(Bf, g)=(Bf, Bg)_1=(f, Bg),$$

т. е. B — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$. Так как

$$(Bf, f)=(Bf, Bf)_1=|Bf|_1\geqslant 0,$$

то B положителен; далее, из $Bf_0=0$ следует

$$(f_0, f)=(Bf_0, f)_1=0,\quad f\in L,$$

а так как L плотно в $\mathfrak{H}$, то $f_0=0$. Таким образом, B^{-1} существует в L_1, L_1 плотно в $\mathfrak{H}$ и B^{-1} — положительный самосопряженный оператор с областью определения L_1; кроме того, (3) можно переписать в виде

$$(B^{-1}\varphi, g)=(\varphi, g)_1\quad \varphi=Bf\in L_1,\quad g\in L_2. \tag{4}$$

Поэтому оператор $A=B^{-1}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Friedrichs'a.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы линейное, плотное в $\mathfrak{H}$ многообразие L было H-многообразием, необходимо и достаточно, чтобы в L существовало скалярное произведение $(f, g)_1$, удовлетворяющее условиям:*

1° $|f|\leqslant|f|_1$ $\left(|f|=(f, f)^{\frac{1}{2}},\ |f|_1=(f, f)_1^{\frac{1}{2}},\ f\in L\right)$;

2° *L полно относительно $|f|_1$.*

Доказательство. Необходимость почти очевидна. В самом деле, пусть H — самосопряженный оператор с областью определения L. Положим

$$(f, g)_1 = (Hf, Hg) + (f, g), \quad f, g \in L,$$

тогда

$$|f|_1^2 = |Hf|^2 + |f|^2,$$

и условие 1° выполнено. Далее, из

$$|f_n - f_m|_1 \to 0, \quad n, m \to \infty, \quad f_n, f_m \in L$$

следует

$$|f_n - f_m| \to 0, \quad |Hf_n - Hf_m| \to 0.$$

В силу замкнутости H существует $f_0 \in L$ такой, что

$$|f_n - f_0| \to 0, \quad |Hf_n - Hf_0| \to 0, \quad n \to \infty,$$

следовательно,

$$|f_n - f_0|_1^2 = |f_n - f_0|^2 + |Hf_n - Hf_0|^2 \to 0, \quad n \to \infty$$

и 2° также выполнено.

Пусть, обратно, $(f, g)_1$ удовлетворяет 1°, 2°, и пусть A, B — операторы, фигурирующие в доказательстве теоремы Friedrichs'а. Положим $H = \sqrt{B^{-1}} = \sqrt{A}$, так что $H^2 = B^{-1}$; для $f \in L_1$ вектора Hf, $H^2 f = B^{-1} f$ имеют смысл и

$$|Hf|^2 = (Hf, Hf) = (H^2 f, f) = (B^{-1} f, f) = (f, f)_1 = |f|_1^2.$$

Рассмотрим теперь B только на L; в силу 1°, (2) и (3)

$$|Bf|_1 \leqslant |f| \leqslant |f|_1, \quad (Bf, g)_1 = (f, g) = (f, Bg)_1, \quad f, g \in L;$$

поэтому B — ограниченный самосопряженный оператор в L (относительно $(f, g)_1$).

Так как из $Bf = 0$ следует $f = 0$, то его область изменения на L

$$L_2 = BL \subset B\mathfrak{H} = L_1$$

плотна в L (относительно $(f, g)_1$); поэтому и L_1 плотно в L (относительно $(f, g)_1$).

Пусть теперь f_0 — произвольный элемент из L. В силу только что сказанного существует последовательность $f_n \in L_1$ такая, что $|f_n - f_0|_1 \to 0$, $n \to +\infty$. Но тогда также

$$|f_n - f_0| \to 0, \quad |Hf_n - Hf_m| = |f_n - f_m|_1 \to 0, \quad n, m \to \infty,$$

следовательно, в силу замкнутости H, Hf_0 имеет смысл. Итак, все L входит в область определения H.

Пусть H_0 — оператор, равный H и рассматриваемый только на L; тогда H_0 — замкнутый оператор. В самом деле, из

$$|f_n - f_0| \to 0, \quad |H_0 f_n - g_0| \to 0, \quad n \to \infty, \quad f_n \in L \tag{5}$$

следует

$$|f_n - f_m|_1 = |H_0 f_n - H_0 f_m| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Так как L полно относительно $|f|_1$, то существует элемент $h_0 \in L$ такой, что

$$|f_n - h_0|_1 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Но тогда также $|f_n - h_0| \to 0$, следовательно, в силу (5) $f_0 = h_0 \in L$ и (6) можно переписать в виде

$$|H_0 f_n - H_0 f_0| \to 0,$$

откуда $g_0 = H_0 f_0$.

Таким образом H_0 — замкнутый оператор, т. е.

$$H_0 = \tilde{H}_0$$

($\sim$ обозначает операцию замыкания). Пусть теперь H_1 — оператор, равный H и определенный только на L_1; тогда* $\tilde{H}_1 = H$. С другой стороны, из

$$H_1 \subset H_0 \subset H$$

следует

$$\tilde{H}_1 \subset \tilde{H}_0 \subset \tilde{H},$$

т. е.

$$H = \tilde{H}_1 \subset H_0 \subset H,$$

следовательно

$$H_0 = H,$$

т. е. самосопряженный оператор H имеет область определения L и L есть H-многообразие.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть L — линейное многообразие, плотное в $\mathfrak{H}$, а $(f, g)_1$ — скалярное произведение, определенное в L, причем необязательно, чтобы из $|f|_1 = 0$ следовало $f = 0$. Для того чтобы существовал положительный самосопряженный оператор H с областью определения L, удовлетворяющей условию*

$$(f, g)_1 = (Hf, Hg), \quad f, g \in L,$$

необходимо и достаточно, чтобы из

$$|f_n - f_0| \to 0, \quad |f_n - f_m|_1 \to 0, \quad n, m \to \infty, \tag{7}$$

следовало

$$f_0 \in L, \quad |f_n - f_0|_1 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Доказательство. Необходимость следует из замкнутости H; обратно, если это условие выполнено, то положим

$$(f, g)_2 = (f, g) + (f, g)_1, \quad f, g \in L.$$

Тогда $(f, g)_2$ удовлетворяет 1° теоремы 1. Далее, из

$$|f_n - f_m|_1^2 = |f_n - f_m|^2 + |f_n - f_m|_1^2 \to 0, \quad n, m \to \infty$$

следует, что существует f_0 такой, что $|f_n - f_0| \to 0$, $n \to \infty$; кроме того, $|f_n - f_m|_1 \to 0$, $n, m \to \infty$. Поэтому $f_0 \in L$ и $|f_n - f_0|_1 \to 0$, следовательно,

$$|f_n - f_0|_2^2 = |f_n - f_0|_1^2 + |f_n - f_0|^2 \to 0, \quad n \to \infty,$$

так что L полно относительно $|f|_2$.

Пусть B, A, H — операторы, построенные для $(f, g)_2$, как в доказательстве теоремы 1 для $(f, g)_1$. Так как для $f \in L_1$

$$((A - 1) f, f) = (Af, f) - (f, f) = (f, f)_2 - (f, f) = (f, f)_1 \geqslant 0,$$

---

[1] См. J. v. Neumann ([4]), теорема 4.

то оператор $A-1$ есть положительный самосопряженный оператор. Поэтому оператор

$$H' = \sqrt{A-1}$$

имеет смысл, и для $f \in L_1$,

$$|H'f|^2 = (H'f, H'f) = (H'^2 f, f) = ((A-1)f, f) = (f, f)_1 = |f|_1^2. \qquad (9)$$

Пусть $f_0 \in L$; так как L_1 плотно в L относительно $|f|_2$, то существует последовательность $\{f_n\}$ такая, что $f_n \in L_1$ и

$$|f_n - f_0|_2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Но тогда также

$$|f_n - f_0| \to 0, \quad |f_n - f_0|_1 \to 0,$$

следовательно

$$|H'f_n - H'f_m| = |f_n - f_m|_1 \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Поэтому, в силу замкнутости H', $H'f_0$ имеет смысл и

$$|H'f_0| = \lim_{n \to \infty} |H'f_n| = \lim_{n \to \infty} |f_n|_1 = |f_0|_1,$$

так что H' имеет смысл на L и (9) выполняется на всем L. Повторяя рассуждение, приведенное в конце доказательства теоремы 1, получаем, что L является областью определения H' и

$$|H'f| = |f|_1, \quad f \in L,$$

откуда

$$(H'f, H'g) = (f, g)_1 \quad f, g \in L.$$

Будем называть скалярное произведение $(f, g)_1$ *обобщенным*, если не обязательно $|f|_1$; далее, мы будем $(f, g)_1$ называть *замкнутым*, если из (7) следует (8); $(f, g)_2$, определенное в L_2, будем называть *продолжением* $(f, g)_1$, определенного в L_1 ($(f, g)_1 \subset (f, g)_2$), если $L_1 \subset L_2$, и в L_1, $(f, g)_1 = (f, g)_2$.

Легко видеть, что обобщенное $(f, g)_1$ можно замкнуть, т. е. продолжить до замкнутого $(f, g)_2$ в том и только том случае, когда из

$$|f_n| \to 0, \; |f_n - f_m|_1^2 \to 0, \; f_n \in L_1, \; n, m \to \infty \qquad (10)$$

следует

$$|f_n|_1 \to 0. \qquad (11)$$

В самом деле, необходимость этого условия очевидна; обратно, если это условие выполнено, достаточно в качестве L_2 взять совокупность всех f_0, для которых существует последовательность $\{f_n\}$, удовлетворяющая условиям:

$$|f_n - f_0| \to 0, \; |f_n - f_m|_1 \to 0, \; f_n \in L_1, \; n, m \to \infty,$$

и для двух таких элементов f_0, g_0 положить

$$(f_0, g_0)_2 = \lim_{n \to \infty} (f_n, g_n)_1.$$

При этом существование предела справа, независимость $(f_0, g_0)_2$ от выбора $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, его замкнутость и соотношение $(f, g)_1 \subset (f, g)_2$ проверяются непосредственно.

Пользуясь этой терминологией, получаем из теоремы 2

Следствие. *Для того чтобы обобщенное скалярное произведение* $(f, g)_1$, *определенное на линейном плотном многообразии* L, *можно было замкнуть, необходимо и достаточно, чтобы существовал положительный самосопряженный оператор* H *с областью определения* $\supset L$, *удовлетворяющий условию*

$$(f, g)_1 = (Hf, Hg) \quad f, g \in L.$$

Доказательство. Достаточность почти очевидна; именно, если $L_1 (\supset L)$ — область определения H, то достаточно положить

$$(f, g)_2 = (Hf, Hg) \quad f, g \in L_1.$$

Обратно, если $(f, g)_1$ можно замкнуть и $(f, g)_2$ с областью определения L_1 — замыкание $(f, g)_1$, то $(f, g)_2$ удовлетворяет условиям теоремы 2; следовательно, существует положительный самосопряженный оператор H с областью определения L_1 такой, что

$$(Hf, Hg) = (f, g)_2 \quad f, g \in L_1,$$

а значит,

$$(f, g)_1 = (f, g)_2 = (Hf, Hg), \quad f, g \in L.$$

Это следствие можно еще сформулировать следующим образом:

Для того чтобы обобщенное скалярное произведение $(f, g)_1$, *определенное на линейном плотном многообразии* L_1, *можно было представить в виде*

$$(f, g)_1 = (Hf, Hg) \quad f, g \in L_1,$$

где H — *положительный самосопряженный оператор с областью определения* $\supset L_1$, *необходимо и достаточно, чтобы из* (10) *следовало* (11).

ТЕОРЕМА 3. *Если* $L_1, L_2, \ldots, L_k$ $(k < +\infty)$ *суть* H-*многообразия, и их пересечение* $L = L_1 \cdot L_2 \ldots L_k$ *плотно в* $\mathfrak{H}$, *то это пересечение также* H-*многообразие.*

Доказательство. Пусть $(f, g)_1, \ldots, (f, g)_k$ — скалярные произведения соответственно в $L_1, \ldots, L_k$, удовлетворяющие условиям 1°, 2° теоремы 1. Положим

$$(f, g_0) = (f, g)_1 + \ldots + (f, g)_k, \quad f, g \in L.$$

Тогда условие 1° для $(f, g)_0$, очевидно, удовлетворяется. Далее, из

$$|f_n - f_m|_0^2 = |f_n - f_m|_1^2 + \ldots + |f_n - f_m|_k^2 \to 0, \quad n, m \to \infty, \ f_n \in L_0$$

следует

$$|f_n - f_m|_1 \to 0, \ldots, |f_n - f_m|_k \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Так как L_p полно относительно $|f|_p$ $(p = 1, \ldots, k)$, то существуют $g_1 \in L_1, \ldots, g_k \in L_k$ такие, что

$$|f_n - g_1|_1 \to 0, \ldots, |f_n - g_k|_k \to 0, \quad n \to \infty,$$

следовательно, в силу условия 1° теоремы 1,

$$|f_n - g_1| \to 0, \ldots, |f_n - g_k| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому

$$g_1 = g_2 = \ldots = g_k \in L$$

и

$$|f_n - g_1|_0^2 = |f_n - g_1|_1^2 + \ldots + |f_n - g_1|_k^2 \to 0, \quad n \to \infty,$$

так что L полно относительно $|f|_0$.

Таким образом $(f, g)_0$ удовлетворяет 1°, 2° теоремы 1, следовательно, L есть H-многообразие.

ТЕОРЕМА 4. *Если L есть H-многообразие и $f_1, \ldots, f_k$ $(k < +\infty)$ — произвольные элементы $\mathfrak{H}$, то совокупность $\{L, f_1, \ldots, f_k\}$ всех линейных комбинаций*

$$g + c_1 f_1 + \ldots + c_k f_k, \quad g \in L$$

также H-многообразие.

Доказательство. Докажем сперва это утверждение для $k = 1$. Если $f_1 \in L$, то $\{L, f_1\} = L$, так что в этом случае утверждение тривиально; если же $f_1 \bar{\in} L$, то всякий элемент $\varphi \in \{L, f_1\}$ однозначно представляем в виде

$$\varphi = g + c f_0, \quad g \in L.$$

Пусть тогда $(f, g)_1$ — замкнутое обобщенное скалярное произведение в L; определим скалярное произведение элементов

$$\varphi = g + c f_1, \ \varphi' = g' + c' f_1, \quad g, g' \in L$$

равенством

$$(\varphi, \varphi')_2 = (g, g')_1 + c \bar{c}',$$

так что

$$|\varphi|_2^2 = |g|_1^2 + |c|^2.$$

Тогда из

$$|\varphi_n - \varphi_0| \to 0, \ n \to \infty, \ \varphi_n = g_n + c_n f_1, \quad g_n \in L$$

и

$$|\varphi_n - \varphi_m|_2 \to 0, \quad n, m \to \infty$$

следует

$$|g_n - g_m|_1 \to 0, \ |c_n - c_m| \to 0, \quad n, m \to \infty, \tag{12}$$

так что $c_0 = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ существует. Отсюда следует, что существует также (в смысле $|f|$)

$$g_0 = \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n - c_n f_1) = \varphi_0 - c_0 f_1.$$

В силу (12) и замкнутости $(f, g)_1$, $g_0 \in L$ и $|g_0 - g_n|_1 \to 0$, $n \to \infty$, следовательно, $\varphi_0 = g_0 + c_0 f_1 \in \{L, f_1\}$ и

$$|\varphi_n - \varphi_0|_2^2 = |g_n - g_0|_1^2 + |c_n - c_0|^2 \to 0 \quad n \to \infty.$$

Таким образом $(\varphi, \varphi')_2$ — также замкнутое обобщенное скалярное произведение, а потому $\{L, f_1\}$ есть H-многообразие.

Если теперь уже доказано, что $L_{p-1} = \{L, f_1, \ldots, f_{p-1}\}$ есть H-многообразие, то в силу

$$L_p = \{L, f_1, \ldots, f_p\} = \{L_{p-1}, f_p\},$$

L_p также H-многообразие.

ТЕОРЕМА 5 *. *Для того чтобы линейное многообразие L, плотное в $\mathfrak{H}$, было H-многообразием, необходимо и достаточно, чтобы в L существовала последовательность элементов φ_α, определенная для всех порядковых чисел $\alpha <$ некоторого α_0 и удовлетворяющая следующим условиям:*

1° *Для всякой счетной последовательности φ_{α_n} $(n=1, 2, \ldots)$ и для всякой последовательности c_n, для которой $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{\alpha_n}$ сходится сильно в $\mathfrak{H}$ и*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{\alpha_n} \right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2. \tag{13}$$

2° *L состоит из тех и только тех элементов $f \in \mathfrak{H}$, которые представляемы в виде*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{\alpha_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty,$$

причем это представление однозначно.

Доказательство. Пусть L есть H-многообразие, а $(f, g)_1$ — скалярное произведение, удовлетворяющее условиям 1°, 2° теоремы 1. Тогда L — гильбертово пространство относительно $(f, g)_1$ и любая ортонормальная система элементов φ_α в L (относительно $(f, g)_1$) удовлетворяет условиям 1°, 2°.

Обратно, если такая система φ_α существует, то для двух произвольных элементов L

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{\alpha_n}, \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \varphi_{\alpha_n}$$

(включением коэффициентов c_n, c'_n, равных нулю, можно добиться, что система φ_{α_n} одна и та же для f и g) полагаем

$$(f, g)_1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \bar{c}'_n. \tag{14}$$

Тогда, в силу (13), $|f|_1^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \geqslant |f|^2$; кроме того, L со скалярным произведением $(f, g)_1$ изоморфно (необязательно сепарабельному) гильбертову пространству последовательностей $\{c_\alpha\}$, следовательно, L полно относительно $(f, g)_1$. Таким образом $(f, g)_1$ удовлетворяет условиям 1°, 2° теоремы 1, следовательно, L есть H-многообразие.

Построим теперь пример линейного плотного многообразия, не являющегося H-многообразием, причем для простоты будем рассматривать случай сепарабельного $\mathfrak{H}$.

---

* В этой теореме содержится ответ на вопрос, поставленный М. М. Гринблюмом.

Пусть φ_n — полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$, а L — совокупность всех конечных линейных комбинаций φ_n. Если бы L было H-многообразием, то существовало бы скалярное произведение $(f, g)_1$ в L, удовлетворяющее 1°, 2° теоремы 1. Так как φ_n — линейно независимы, то их можно заменить такими их конечными линейными комбинациями ψ_n, которые образуют ортонормальную систему относительно $(f, g)_1$, причем совокупность всех конечных линейных комбинаций элементов ψ_n совпадает с L.

Положим

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty, \ c_k \neq 0, \ k = 1, 2, 3, \dots;$$

в силу

$$|f_n - f_m|_1^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2 \to 0, \qquad n, m \to \infty,$$

существует элемент $f_0 \in L$ такой, что $|f_n - f_0|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Но, с другой стороны, в силу

$$(f_0, \psi_k)_1 = c_k \neq 0,$$

f_0 не может быть линейной комбинацией конечного числа ψ_n. Отметим далее, что существуют H-многообразия L_1, L_2, пересечение которых состоит из одного нуля. В самом деле, пусть $\mathfrak{H}$—совокупность всех функций $f(x)$, имеющих суммируемый квадрат в интервале $[0, 1]$, и пусть $p(x)$ — функция, непрерывная в интервале $[0, 1]$, но не имеющая ни в одной точке $[0, 1]$ производную и удовлетворяющая в $[0, 1]$ неравенствам

$$C_1 < p(x) < C_2, \quad C_1, C_2 > 0.$$

Обозначим через L_1, L_2 совокупности всех функций $f(x)$, $g(x)$, представимых в виде

$$f(x) = C + \int_0^x \varphi(t)\, dt, \quad \varphi \in \mathfrak{H},$$

$$g(x) = \frac{1}{p(x)}\left[C' + \int_0^x \psi(t)\, dt \right], \quad \psi \in \mathfrak{H},$$

и положим для $f \in L_1$, $g \in L_2$

$$A_1 f = \varphi = f'(x),$$
$$A_2 g = \psi = (pg)'.$$

Операторы A_1, A_2 — замкнутые (см. например ([1])), следовательно в силу замечания на стр. 165, L_1, L_2 суть H-многообразия. С другой стороны, $L_1 L_2 = (0)$. В самом деле, из равенства $f(x) = g(x) \neq 0$ следовало бы

$$p(x) = \frac{C + \int_0^x \psi(t)\, dt}{C + \int_0^x \varphi(t)\, dt};$$

так как числитель и знаменатель имеют производную почти всюду, и знаменатель отличен от нуля на множестве положительной меры, то вышло бы, что $p(x)$ имеет производную на множестве положительной меры, что невозможно.

В заключение отметим ряд предложений, связывающих рост замкнутого оператора с его областью определения и верных для любого пространства типа (B) ([3]).

ТЕОРЕМА 6. *Пусть E — нормированное пространство типа (B) (не обязательно полное) с нормой $|f|$, E_1, E_2 — его линейные подпространства, причем $E_1 \subset E_2$; пусть $|f|_1$, $|f|_2$ — две другие нормы в E_1, E_2 соответственно, удовлетворяющие условиям:*

1° $|f| \leqslant |f|_1$, $|f| \leqslant |f|_2$ при $f \in L_1$, L_2 соответственно;

2° E_1, E_2 полны относительно $|f|_1$, $|f|_2$ соответственно.

Тогда для любого $f \in E_1$ и некоторой константы C

$$|f|_2 \leqslant C|f|_1.$$

Доказательство. Положим

$$|f|_3 = |f|_1 + |f|_2, \quad f \in E_1; \tag{15}$$

тогда $|f|_3$ является нормой в E_1, причем E полно относительно $|f|_3$. В самом деле, из

$$|f_n - f_m|_3 \to 0, \ n, m \to \infty, \ f_n, f_m \in E_1$$

в силу (15) следует

$$|f_n - f_m|_1 \to 0, \quad |f_n - f_m|_2 \to 0.$$

Поэтому в силу 2° существуют элементы $f_0 \in E_1$, $g_0 \in E_2$ такие, что

$$|f_n - f_0|_1 \to 0, \ |f_n - g_0|_2 \to 0 \quad n \to \infty,$$

а следовательно, в силу 1°,

$$|f_n - f_0| \to 0, \ |f_n - g_0| \to 0 \quad n \to \infty.$$

Но тогда $f_0 = g_0$ и

$$|f_n - f_0|_3 = |f_n - f_0|_1 + |f_n - f_0|_2 \to 0 \quad n \to \infty.$$

Так как, кроме того, $|f|_3 \geqslant |f|_1$, то по известной теореме S. Banach'a [см. ([3]), стр. 41, теорема 6] $|f|_3$ и $|f|_1$ топологически эквивалентны. Поэтому существует константа C такая, что $|f|_1 + |f|_2 \leqslant C|f|_1$, следовательно, и подавно $|f|_2 \leqslant C|f|_1$.

Следствие *. *Пусть E, E_1, E_2, $|f|$, $|f|_1$, $|f|_2$ таковы же, как в теореме 6. Если $E_1 = E_2$, то $|f|_1$ и $|f|_2$ топологически эквивалентны.*

Доказательство. Так как в этом случае E_1 и E_2 можно поменять местами, то

$$|f|_1 \leqslant C_1|f|_2, \ |f|_2 \leqslant C_2|f|_1, \quad f \in E_1 = E_2.$$

Замечание. Из последнего предложения следует, что всякая банахова норма $|f|_2$, удовлетворяющая условиям 1°, 2° теоремы 1, топологически эквивалентна норме $|f|_1$, рассматриваемой в этой теореме.

* Этот факт независимо от меня обнаружил также И. М. Гельфанд.

В частности, условия 1°, 2° теоремы 1 определяют $|f|_1$ однозначно с точностью до топологической эквивалентности.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть A_1, A_2 — два линейных замкнутых оператора в полном пространстве E типа (B) с областями определения L_1, L_2, плотными в E, и пусть для $f \in L_1, L_2$ и некоторых C_1, C_2*

$$|A_1 f| \geqslant C_1 |f|, \quad |A_2 f| \geqslant C_2 |f|. \tag{16}$$

Если тогда $L_1 \subset L_2$, то для всех $f \in L_1$ и некоторого C

$$|A_2 f| \leqslant C |A_1 f|; \tag{17}$$

если же $L_1 = L_2$, то для всех $f \in L_1$ и некоторых C', C''

$$C' |A_1 f| \leqslant |A_2 f| \leqslant C'' |A_1 f|. \tag{18}$$

Доказательство. Положим для $f \in L_1, L_2$ соответственно

$$|f|_1 = \frac{|A_1 f|}{C_1}, \quad |f|_2 = \frac{|A_2 f|}{C_2};$$

тогда $|f|_1, |f|_2, E_1 = L_1, E_2 = L_2$ удовлетворяют условиям 1°, 2° теоремы 6. Именно, 1° следует из (16); далее, если

$$|f_n - f_m|_1 = \frac{|A_1 f_n - A_1 f_m|}{C} \to 0, \quad f_n, f_m \in L_1, \quad n, m \to \infty,$$

то также

$$|f_n - f_m| \to 0, \quad |A_1 f_n - A_1 f_m| \to 0, \quad n, m \to \infty;$$

следовательно, существуют $f_0, g_0 \in E$ такие, что

$$|f_n - f_0| \to 0, \quad |A_1 f_n - g_0| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Так как A_1 — замкнутый оператор, это означает, что $f_0 \in L_1$, $A_1 f_0 = g_0$ и

$$|f_n - f_0|_1 = \frac{|A_1 f_n - A_1 f_0|}{C_1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Применяя теорему 6, получаем

$$\frac{|A_2 f|}{C_2} \leqslant C' \frac{|A_1 f|}{C_1},$$

откуда и следует (17). Второе утверждение теоремы является непосредственным следствием первого.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
31. X. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Stone M. H., Linear transformations in Hilbert space, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, XV (1932).

[2] Гринблюм М. М., О геометрической структуре симметрического оператора, определенного в пространстве Гильберта, ДАН, III (XII) (1936), 407—410.

Greenblum M. M., On the geometrical structure of the symmetric transformation in Hilbert's space, C. R. Acad. Sci. URSS, III (XII) (1936), 407—410.

[3] Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932.

[4] Neumann J. v., Über adjungierte Funktionaloperatoren, Annals of Math., 33 (1932), 294—310.

[5] Friedrichs K., Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren, Math. Ann., 109 (1934), 465—487.

[6] Riesz F., Zur Theorie des Hilbertschen Raumes, Acta Szeged, 7 (1934), 34—38.

M. NEUMARK. ON THE DOMAIN OF A SELF-ADJOINT OPERATOR

SUMMARY

The present note contains some necessary and sufficient conditions for a linear manifold dense in the Hilbert space (1) $\mathfrak{H}$ to be a domain of a self-adjoint operator. In particular a question is solved which was proposed in a paper of M. M. Greenblum (2). Some of the results are also true for an arbitrary normed space of the type (B) (3).

Definition. A linear manifold L dense in the Hilbert space $\mathfrak{H}$ will be called an H-manifold, if there exists a self-adjoint operator with the domain L.

We note that L will be an H-manifold as soon as there exists a linear closed operator with the domain L; in fact, by a theorem of J. v. Neumann (4), $H=\sqrt{A^*A}$ is a self-adjoint operator with the domain L.

THEOREM 1. *A linear manifold L dense in $\mathfrak{H}$ is an H-manifold if and only if there exists a new scalar product $(f, g)_1$ defined on L and satisfying the following conditions*:

1° $|f| \leqslant |f|_1 \quad \left(|f| = (f, f)^{\frac{1}{2}},\ \ |f|_1 = (f, f)_1^{\frac{1}{2}}\right)$,

2° *L is complete with respect to $|f|_1$.*

Proof. The necessity follows immediately: if H is a self-adjoint operator with the domain L, then

$$(f, g)_1 = (f, g) + (Hf, Hg), \quad f,\ g \in L$$

satisfies 1°, 2°. Suppose now conversely that a $(f, g)_1$ satisfying 1°, 2° exists. Using a well-known theorem of F. Riesz (6) we deduce from

$$|(f, g)| \leqslant |f||g| \leqslant |f||g_1| \quad f \in \mathfrak{H}, \quad g \in L$$

that there exists an operators B with the properties:

$$(f, g) = (Bf, g)_1, \quad |Bf| \leqslant |Bf|_1 \leqslant |f| \leqslant |f|_1, \quad f \in \mathfrak{H}, \quad g \in L, \quad Bf \in L. \quad (1)$$

By (1) B is bounded and self-adjoint; further

$$(Bf, f) = (Bf, Bf)_1 \geqslant 0, \quad f \in L,$$

so that B is positive, and from $Bf = 0$ it follows that

$$(f, g) = (Bf, g)_1 = 0, \quad g \in L.$$

Since L is dense in $\mathfrak{H}$, $f = 0$; thus B^{-1} exists on the range $L_1 (\subset L)$ of B, L_1 is dense in $\mathfrak{H}$, and B^{-1} is positive, self-adjoint, and satisfies*

$$(B^{-1}\varphi, g) = (\varphi, g)_1, \quad \varphi \in L_1, \quad g \in L. \quad (1a)$$

Consider B only on L; then, by (1), B is a bounded self-adjoint operator in the Hilbert space L (with respect to $(f, g)_1$); hence its range $L_2 = BL$ on L is dense in L (with respect to $(f, g)_1$) and therefore $L_1 (\supset L_2)$ is also dense in L (with respect to $(f, g)_1$).

Now put $H = \sqrt{B^{-1}}$; for $f \in L_1$,

$$|Hf|^2 = (Hf, Hf) = (H^2 f, f) = (B^{-1} f, f) = (f, f)_1 = |f|_1^2.$$

* So far we were following K. Friedrichs (5).

if $f_0 \in L$, there exists a sequence $f_n \in L_1$ such that

$$|f_n - f_0|_1 \to 0, \quad n \to \infty$$

and therefore

$$|f_n - f_0| \to 0, \quad |Hf_n - Hf_m| = |f_n - f_m|_1 \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Since H is closed, f_0 belongs to the domain of H; thus L belongs to the domain of H.

Now let H_0 be the operator which has the domain L and is equal to H on L. Since L is complete with respect to $|f|_1$, H_0 can be easily shown to be closed, i. e., $\tilde{H}_0 = H$. Further let H_1 be $= H$ and have the domain L_1. Then* $\tilde{H}_1 = H$; thus from $H_1 \subset H_0 \subset H$ we conclude that $H = \tilde{H}_1 \subset \tilde{H}_0 = H_0 \subset \tilde{H} = H$, and therefore $H_0 = H$. So H has the domain L and L is an H-manifold.

A scalar product $(f, g)_1$ will be called g e n e r a l i z e d, if $|f|_1 = 0$ does not necessarily imply $f = 0$: a generalized scalar product $(f, g)_2$ defined on L_2 will be called an e x t e n s i o n of a generalized scalar product $(f, g)_1$ defined on L_1, if $L_1 \subset L_2$, and on L_1: $(f, g)_1 = (f, g)_2$. A generalized scalar product $(f, g)_1$ defined on $(f, g)_1$ will be said to be c l o s e d, if from

$$|f_n - f_0| \to 0, \quad |f_n - f_m|_1 \to 0, \quad f_n \in L_1, \quad n, m \to \infty \tag{2}$$

it follows

$$f_0 \in L, \quad |f_n - f_0|_1 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

It can be easily shown that a generalized scalar product $(f, g)_1$ defined on L_1 has a closed extension, if and only if

$$|f_n| \to 0, \quad |f_n - f_m|_1 \to 0, \quad f_n \in L_1, \quad n, m \to \infty \tag{4}$$

implies

$$|f_n|_1 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5}$$

THEOREM 2. *Let L be a linear manifold dense in* $\mathfrak{H}$, *and* $(f, g)_1$ *a generalized scalar product defined on L. Then a positive self-adjoint operator H with the domain L satisfying*

$$(f, g)_1 = (Hf, Hg), \quad f, g \in L$$

exists, if and only if $(f, g)_1$ *is closed.*

P r o o f. The necessity is obvious; conversely, if this condition is satisfied, put

$$(f, g)_2 = (f, g) + (f, g)_1, \quad f, g \in L;$$

then $(f, g)_2$ satisfies 1°, 2° of theorem 1. Let H be the operator associated with $(f, g)_2$ in the same way as with $(f, g)_1$ in the proof of theorem 1; then put $H_0 = \sqrt{H^2 - 1}$. The domain of H_0 is the same as of H, i. e., L, and

$$|H_0 f|^2 = |Hf|^2 - |f|^2 = |f|_2^2 - |f|^2 = |f|_1^2, \quad f \in L;$$

therefore

$$(H_0 f, H_0 g) = (f, g)_1, \quad f, g \in L.$$

* See J. v. Neumann ([4]), Theorem 4.

Corollary. *Let* $(f, g)_1$ *be a generalized scalar product defined on a linear dense manifold* L; *then* $(f, g)_1$ *has a closed extension, if and only if there exists a positive self-adjoint operator* H *with the domain* $\supset L$ *satisfying*

$$(f, g)_1 = (Hf, Hg), \quad f, g \in L.$$

This corollary may be also formulated as follows:

Let $(f, g)_1$ *be a generalized scalar-product defined on a linear dense manifold* L; *then a positive self-adjoint operator* H *with the domain* $\supset L$ *satisfying*

$$(f, g)_1 = (Hf, Hg), \quad f, g \in L,$$

exists, if and only if

$$|f_n| \to 0, \quad |f_n - f_m|_1 \to 0, \quad f_n \in L, \quad n, m \to \infty$$

implies

$$|f_n|_1 \to 0.$$

THEOREM 3. *If* $L_1, L_2, \ldots, L_k$ $(k < +\infty)$ *are* H-*manifolds and their intersection* $L = L_1 \cdot L_2 \ldots L_k$ *is dense in* $\mathfrak{H}$, *then this intersection is also an* H-*manifold.*

Proof. Let $(f, g)_1, \ldots, (f, g)_k$ be scalar products in $L_1, \ldots, L_k$, satisfying 1°, 2° of theorem 1 for $L_1, \ldots, L_k$ resp. Then

$$(f, g)_0 = (f, g)_1 + \ldots + (f, g)_k$$

satisfies 1°, 2° of theorem 1 for L.

THEOREM 4. *If* L *is an* H-*manifold and* $f_1, \ldots, f_k$ $(k < +\infty)$ *are arbitrary elements in* $\mathfrak{H}$, *then the manifold* $\{L, f_1, \ldots, f_k\}$ *of linear combinations*

$$g + c_1 f_1 + \ldots + c_k f_k, \quad g \in L$$

is also an H-*manifold.*

Proof. Let $k = 1$; the assertion is obvious, if $f_1 \in L$. If $f_1 \bar{\in} L$, then every element $\varphi \in \{L, f\}$ is representable in a unique manner in the form

$$\varphi = g + cf_1, \quad g \in L.$$

Let $(f, g)_1$ be a generalized closed scalar product in L; for

$$\varphi = g + cf_1, \quad \varphi' = g' + cf_1, \quad g, g' \in L,$$

we put

$$(\varphi, \varphi')_2 = (g, g')_1 + c\bar{c}'.$$

Then $(\varphi, \varphi')_2$ is also a generalized closed scalar product in $\{L, f_1\}$. Having proved our theorem for $k = 1$, we prove it for any k by induction.

THEOREM 5*. *Let* L *be a linear dense manifold; then* L *is an* H-*manifold, if and only if there exists a sequence of elements* $\{\varphi_\alpha\}$ *in* L *defined for all ordinal numbers* $\alpha < \aleph_0$ *and satisfying the following conditions*:

* This theorem is the answer to the question proposed by M. M. Greenblum (2).

1° *For every countable sequence* φ_{α_n} $(n=1, 2, 3, \ldots)$ *and for every sequence* c_n *with* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$ *the series* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{\alpha_n}$ *converges strongly in* $\mathfrak{H}$, *and*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{\alpha_n} \right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

2° L *consists of those and only those elements* $f \in \mathfrak{H}$, *which are representable in a unique manner in the form*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{\alpha_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

Proof. If L is an H-manifold and $(f, g)_1$ is defined as in theorem 1, then L is a Hilbert space with respect to $(f, g)_1$ and every complete orthonormal (with respect to $(f, g)_1$) set φ_α in L satisfies 1° and 2°. Conversely, if φ_α exists, put for

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_{\alpha_n}, \qquad g = \sum_{n=1}^{\infty} c_n' \varphi_{\alpha_n},$$

$$(f, g)_1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \bar{c}_n'.$$

Then $(f, g)_1$ satisfies 1°, 2° of theorem 1; thus L is an H-manifold.

An example of a linear dense manifold which is not an H-manifold can be easily given. So the set of all finite linear combinations of the elements of a complete orthonormal set $\{\varphi_\alpha\}$ has this property.

Further there exist also H-manifolds L_1, L_2 such that $L_1 \cdot L_2 = (0)$. Take, for instance, for $\mathfrak{H}$ the set of all functions $f(x)$, which are Lebesgue square summable in $(0, 1)$, and for L_1, L_2 resp. the sets of all functions $f(x)$, $g(x)$ representable in the form

$$f(x) = C + \int_0^x \varphi(t)\, dt, \qquad g(x) = \frac{1}{p(x)} \left[C' + \int_0^x \psi(t)\, dt \right],$$

where $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$ and $p(x)$ is continuous, not differentiable at any point of $(0, 1)$ and satisfying $C_1 \leqslant p(x) \leqslant C_2$, $C_1, C_2 > 0$. Then L_1, L_2 are H-manifolds and $L_1 \cdot L_2 = (0)$.

Finally we point out some facts which are true for arbitrary spaces of the type (B).

THEOREM 6. *Let* E *be a normed space of the type* (B) *with the norm* $|f|$ *(not necessarily complete) and* E_1, E_2 *two linear manifolds in* E; *let* $E_1 \subset E_2$, *and let* $|f|_1$, $|f|_2$ *be two norms in* E_1, E_2 *resp., satisfying the following conditions*:

1° $|f| \leqslant |f|_1$, $|f| \leqslant |f|_2$, $f \in E_1$, E_2 *resp.*;

2° E_1, E_2 *are complete with respect to* $|f|_1$, $|f|_2$.

Then for every $f \in E_1$ *and some constant* C

$$|f|_2 \leqslant C\,|f|_1.$$

P r o o f. Put

$$|f|_3 = |f|_1 + |f|_2, \quad f \in E_1;$$

then E_1 can be easily shown to be complete with respect to $|f|_3$. Since moreover $|f|_3 \geqslant |f|_1 \geqslant |f|$, we conclude by a theorem of S. Banach ((3), p. 41), that $|f|_3$ and $|f|_1$ are topologically equivalent. Thus $|f|_3 \leqslant C\,|f|_1$ for some C, and therefore $|f|_2 \leqslant C\,|f|_1$.

C o r o l l a r y *. *Let* $E, E_1, E_2, |f|, |f|_1, |f|_2$ *be defined as in theorem* 6. *If* $E_1 = E_2$, *then* $|f|_1$ *and* $|f|_2$ *are topologically equivalent.*

THEOREM 7. *Let* A_1, A_2 *be two linear closed operators in a complete space of the type* (B) *with the domains* L_1, L_2 *dense in* E, *and let*

$$|A_1 f| \geqslant C_1 |f|, \quad |A_2 f| \geqslant C_2 |f| \tag{6}$$

for $f \in L_1$, L_2 *resp. and some* C_1, C_2. *If now* $L_1 \subset L_2$, *then*

$$|A_2 f| \leqslant C\,|A_1 f| \tag{7}$$

for all $f \in L_1$ *and some* C; *if* $L_1 = L_2$, *then*

$$C'\,|A_1 f| \leqslant |A_2 f| < C''\,|A_1 f| \tag{8}$$

for $f \in L_1$ *and some* C', C''.

P r o o f. Put

$$|f|_1 = \frac{|A_1 f|}{C_1}, \quad |f|_2 = \frac{|A_2 f|}{C_2}, \quad f \in L_1,\ L_2 \text{ resp.}$$

Since A_1, A_2 are closed and E is complete, $|f|_1$, $|f|_2$ and $E_1 = L_1$, $E_2 = L_2$ satisfy 1°, 2° of theorem 6. Thus, if $L_1 \subset L_2$

$$\frac{|A_2 f|}{C_2} \leqslant C'\,\frac{|A_1 f|}{C_1}, \quad |A_2 f| \leqslant \frac{C'C_2}{C_1}|A_1 f|, \quad f \in L_1.$$

So we have (7); (8) is an immediate corollary of (7) and $L_1 = L_2$.

---

* This fact was also found out independently from me by I. Gelfand.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая Serie mathematique

Б. В. ГНЕДЕНКО

К ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье излагается общий метод доказательства предельных теорем для сумм независимых случайных величин. Найденные в ней необходимые и достаточные условия существования предельного закона и сходимости к нему законов распределения сумм применяются к различным специальным предельным законам. В частности, почти без всяких вычислений, выводятся необходимые и достаточные условия для закона больших чисел, центральной предельной теоремы теории вероятностей и др.

Введение

За последнее десятилетие в теории вероятностей достигнут значительный прогресс в изучении предельных теорем для сумм независимых случайных величин. За это время не только получили полное решение классические предельные задачи — нахождение необходимых и достаточных условий для применимости закона больших чисел [Колмогоров, 1926 г. ([5])] и отыскание необходимых и достаточных условий для теоремы Лапласа-Ляпунова [Feller, 1935 г. ([11]), I)], — но также были поставлены и большей частью решены новые проблемы и значительно расширены постановки старых.

В классических задачах рассматривалась последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

независимых случайных величин; для этой последовательности строились суммы

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

и по отношению к ним ставились вопросы: при каких условиях

$$1^\circ \quad P\left\{\left|\frac{s_n - Es_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,^*$$

для каждого $\varepsilon > 0$ (закон больших чисел)?

$$2^\circ \quad P\left\{\frac{s_n - Es_n}{\sqrt{E(s_n - Es_n)^2}} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

* Здесь и всюду дальше я употребляю общепринятые обозначения: $E(y)$—математическое ожидание y, $P\{\ldots\}$ — вероятность неравенства, указанного в скобках

(теорема Лапласа - Ляпунова или центральная предельная теорема).

При этом в первой проблеме из требования $P\{|s_n - Es_n| \geqslant \varepsilon n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ автоматически получается, что при любом $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{x_k - Ex_k}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (1')$$

равномерно относительно k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, а во второй проблеме требуется, чтобы

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{E(x_k - Ex_k)^2}{E(s_n - Es_n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad (1'')$$

Теперь те же, в сущности, предельные задачи, относящиеся к схеме последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (2)$$

независимых случайных величин, ставятся так (в скобках я указываю авторов постановок проблем):

1. При каких условиях для данной последовательности положительных постоянных $B_n > 0$ можно подобрать такие постоянные A_n $(-\infty < A_n < +\infty)$, что при любом $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{s_n}{B_n} - A_n\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

[А. Н. Колмогоров, 1928 ([5]); W. Feller, 1937 ([12])].

2. Предполагается, что случайные величины x_k неотрицательны, т. е. что $P\{x_k < 0\} = 0$ при всех k. При каких условиях можно подобрать такую последовательность постоянных $B_n > 0$, что

$$P\left\{\left|\frac{s_n}{B_n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

при любом $\varepsilon > 0$? [А. Я. Хинчин, 1935 ([16])].

3. К каким законам могут сходиться законы распределения последовательности сумм

$$s_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{B_n} - A_n$$

при подходящем выборе постоянных $B_n > 0$ и A_n $(-\infty < A_n < +\infty)$? [А. Я. Хинчин, 1936].

4. Каковы условия, при которых можно подобрать постоянные $B_n > 0$ и A_n $(-\infty < A_n < +\infty)$ так, что законы распределения сумм

$$s_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{B_n} - A_n$$

сходятся a) к определенному предельному закону, b) к какому-нибудь предельному закону?

5. Особый интерес имеют проблемы 3-я и 4-я для частного случая последовательности (2), когда все x_k имеют один и тот же закон распределения [P. Lévy, 1925 ([6])].

В настоящее время получено исчерпывающее решение проблем 1-ой [А. Н. Колмогоров (5) для случая $B_n = n$ и W. Feller (12) в общем случае], 2-ой [А. Я. Хинчин (16) для одинаково распределенных слагаемых и А. А. Бобров (2) в общем случае] и 3-ей [P. Lévy (8)]. Проблема 4-ая решена только для закона Гаусса [P. Lévy (7) и (9), W. Feller (11), I и II]. В проблеме 5-ой найдены класс предельных законов — устойчивые законы [P. Lévy (6) и (10), А. Я. Хинчин (10)] и условия сходимости к закону Гаусса [А. Я. Хинчин (4)].

А. Н. Колмогоров предложил вместо последовательности случайных величин рассматривать последовательность серий

$$x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

независимых в каждой серии случайных величин, и для законов распределения сумм

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

искать предельные закономерности. Понятно, что проблемы 1 — 5, сформулированные нами для классической схемы последовательности независимых величин, возникают также для более общей схемы А. Н. Колмогорова. Заметим, однако, что проблемы 1 — 5 не представляют особого интереса, если на слагаемые x_{nk} не накладывать никаких добавочных условий. Действительно, если x_{nk} не подчинены никаким дополнительным условиям, то для проблемы 3, например, мы получим, что любой закон распределения $F(x)$ может выступать в качестве предельного для законов распределения сумм

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}. \tag{3}$$

Для этого достаточно только подобрать последовательность серий специальным образом. Например первое слагаемое в каждой серии взять распределенным по закону $F(x)$, а все остальные с достоверностью равными нулю (т. е. с законом распределения $\varepsilon(x)$ вида $\varepsilon(x) = 0$ для $x < 0$, $\varepsilon(x) = 1$ для $x > 0$).

Проблемы математической статистики и теоретической физики, сводящиеся в чисто математической части к изучению предельных законов распределения для сумм, подсказывают разумные общие ограничения, которые следует наложить на случайные величины. Эти ограничения состоят в требовании *предельной пренебрегаемости слагаемых* (бесконечной малости слагаемых).

Определение. Величины x_{nk} $(1 \leqslant k \leqslant k_n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ называются пренебрегаемыми в пределе, если равномерно относительно k $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$

$$P\{|x_{nk}| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

при каждом $\varepsilon > 0$.

Очевидно, что требования (1′) и (1″) в классической проблематике приводят как раз к предельной пренебрегаемости слагаемых

$$1')\ x_{nk} = \frac{x_k - Ex_k}{n}, \quad 1'')\ x_{nk} = \frac{x_k - Ex_k}{\sqrt{E(s_n - Es_n)^2}}.$$

Для схемы последовательности (2) также, естественно, выдвигается требование предельной пренебрегаемости слагаемых. Для нее оно состоит в том, что равномерно относительно k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ предполагается выполненным предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{x_k}{B_n} - \frac{A_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Для схемы А. Н. Колмогорова были получены следующие результаты:

1. Доказано предположение А. Н. Колмогорова о том, что класс предельных законов для сумм

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n} \tag{4}$$

предельно пренебрегаемых независимых слагаемых совпадает с классом так называемых безгранично делимых законов [А. Я. Хинчин ([15])]. Частный случай этой теоремы А. Я. Хинчина, в предположении, что

$$\text{a) } Ex_{nk} = 0, \quad Ex_{nk}^2 < +\infty,$$
$$\text{b) } \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} Ex_{nk}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
$$\text{c) } \sum_{k=1}^{k_n} Ex_{nk}^2 < C,$$

был получен Г. М. Бавли ([1]).

2. А. Я. Хинчин доказал также ([15]), что если величины x_{nk} $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ имеют один и тот же закон распределения $F(b_n x + a_n)$, где постоянные $b_n > 0$ и a_n зависят только от n, то все равно класс предельных законов для сумм (4) совпадает с классом безгранично делимых законов.

Настоящая работа посвящена изучению предельных законов для сумм независимых случайных величин. В ней доказывается ряд общих теорем, относящихся к одномерным, вообще говоря, различно распределенным, случайным величинам. В частности, в предлагаемой работе содержатся теоремы 4 и 4′, в силу которых для того, чтобы законы распределения сумм

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

независимых в каждой серии, пренебрегаемых в пределе случайных величин сходились к предельному, необходимо и достаточно, чтобы к тому же предельному закону сходились законы распределения сумм

$$s_n' = x_{n1}' + x_{n2}' + \ldots + x_{nk_n}'$$

независимых, специальным образом подобранных безгранично делимых случайных величин.

Эта теорема вместе с теоремой 2 настоящей работы, устанавливающей условия, необходимые и достаточные для сходимости последовательности безгранично делимых законов к предельному, рассматривается мною как фундамент общего метода доказательства предельных теорем

для сумм независимых, пренебрегаемых в пределе случайных величин. Идея этого метода состоит в том, что суммы

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

данных нам величин, с законами распределения, вообще говоря, произвольными, мы заменяем суммами

$$s'_n = x'_{n1} + x'_{n2} + \ldots + x'_{nk_n}$$

тесно с ними связанных безгранично делимых слагаемых. Такая замена позволяет нам не только унифицировать доказательства разрозненных доселе фактов, но и в значительной мере упростить и сократить необходимые при этих доказательствах вычисления. Эти упрощения являются результатом того, что вместо всего разнообразия законов распределения мы получаем возможность ограничиться рассмотрением только специального класса законов безгранично делимых, для которого операции сложения и перехода к пределу особенно просты.

Непосредственное отыскание закона распределения суммы $x = x_1 + x_2$ двух независимых случайных величин x_1 и x_2 с законами распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ требует вычисления композиции этих законов

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x - z)\, dF_2(z).$$

С целью обойти необходимость прибегать к этой сложной и трудно обозримой аналитической операции был введен аппарат характеристических функций, позволяющий упростить операцию композиции: сложению независимых слагаемых соответствует умножение их характеристических функций:

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t).$$

Выигрыш, который мы получаем от применения характеристических функций, понятен, но, к сожалению, этот аппарат вводит трудность другого рода: функциональная природа характеристических функций значительно сложнее, чем природа законов распределения. Обеих этих трудностей, как это показывает формула П. Леви, для безгранично делимых законов не существует. В самом деле, согласно этой формуле, сложению независимых безгранично делимых величин соответствует сложение неубывающих функций с ограниченным изменением ($G(u) = G_1(u) + G_2(u)$ в рассматриваемом нами примере) и действительных постоянных ($\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$). Таким образом через посредство функций $G(u)$ для безгранично делимых законов распределения удается операцию композиции законов свести к операции сложения монотонных функций, избавиться от аналитической сложности характеристических функций произвольных законов распределения и, кроме того, как это показывается в теореме 2, получить весьма простые условия для перехода к пределу.

Этим еще не исчерпываются выгоды, получаемые от замены произвольных слагаемых безгранично делимыми. К перечисленному нужно добавить, что функции $G_{nk}(u)$ (или $M_{nk}(u)$ и $N_{nk}(u)$) в формуле П. Леви для построенных величин x'_{nk} выражаются весьма просто (линейно с точностью до $\omega_{nk}(1)$) через законы распределения слагаемых

$$G_{nk}(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1))$$

$$(M_{nk}(u) = F_{nk}(u) \quad \text{для} \quad u < 0, \quad N_{nk}(u) = F_{nk}(u) - 1 \quad \text{для} \quad u > 0),$$

и что для важнейших предельных законов (законы Гаусса, Пуассона и многие другие) функции $G(u)$ в формуле П. Леви значительно проще, чем сами эти законы:

для закона Гаусса

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad G(u) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad u < 0, \\ 1 & \text{при} \quad u > 0, \end{cases}$$

для закона Пуассона

$$P(x) = \sum_{0 \leqslant k < x} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}, \quad G(u) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad u < 1, \\ \frac{\lambda}{2} & \text{при} \quad u > 1. \end{cases}$$

Эти обстоятельства также позволяют существенно упрощать связанные с предельными переходами вычисления.

Метод, идея которого была только что описана, применяется в настоящей работе к ряду решенных ранее проблем — закону больших чисел, относительной устойчивости средних, сходимости к закону Гаусса, а также и к решению некоторых новых. Так, например, найдены необходимые и достаточные условия сходимости к закону Пуассона, дано (теоремами 5, 6 и 7) решение проблемы 4 для схемы Колмогорова.

Теорема 7. Для того чтобы законы распределения сумм

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

независимых, пренебрегаемых в пределе слагаемых сходились к предельному, необходимо и достаточно, чтобы при каком-либо $\tau > 0$ существовали неубывающие функции $M(u)$ и $N(u)$ и постоянные a и $\gamma(\tau)$ такие, что

$$1^\circ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) = M(x) \quad \text{для} \quad x < 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(x) - 1) = N(x) \quad \text{для} \quad x > 0$$

в точках непрерывности функций $M(x)$ и $N(x)$;

$$2^\circ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x) = \gamma(\tau);$$

$$3^\circ \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x)-\Big(\int\limits_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x)\Big)^2\right\}=a^2.$$

Естественно, что теорема 7 была использована мной как непосредственное орудие для исследования условий сходимости законов распределения сумм независимых слагаемых к тем или иным конкретным предельным законам.

Предлагаемая работа была подготовлена к печати еще осенью 1937 г.; позднее она подверглась стилистическим исправлениям, вызванным включением некоторых новых результатов (теорем 7, 8, 8′, 10, 17_1, 17_2). Первое сообщение о нижеследующих результатах было опубликовано в Докладах Академии Наук СССР (4).

Моим учителям А. Я. Хинчину и А. Н. Колмогорову, относившимся с живым интересом к моим исследованиям и давшим мне ряд ценных указаний и советов, приношу глубокую благодарность.

Обозначения и сокращения

В дальнейшем я повсюду закон распределения и его характеристическую функцию обозначаю одной и той же буквой, но соответственно строчной и прописной:

$$f_k(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\,dF_k(x);$$

х. ф. означает «характеристическая функция»;

з. р. означает «закон распределения».

Для характеристических функций я ввожу обозначение

$$f(t)=\rho(t)\,e^{i\omega(t)},$$

где $\rho(t)$ и $\omega(t)$ — действительные функции, $0\leqslant\rho(t)\leqslant 1$, $-\pi\leqslant\omega(t)<\pi$, $\rho(0)=1$ и $\omega(0)=0$.

Если з. р. величины x есть $F(x)$, то з. р. величины $-x$ будем обозначать через $\overline{F(x)}=1-F(-x)$.

Случайную величину

$$x^*=x_1+x_2,$$

являющуюся суммой независимых случайных величин x_1 и x_2 с законами распределения $F(x)$ и $\overline{F(x)}$, будем называть симметризованной и ее з. р. обозначать через $F^*(x)$.

Х. ф. симметризованного з. р. $F^*(x)$ равна

$$f^*(t)=\rho^2(t).$$

§ 1. Предельные теоремы для последовательности безгранично делимых законов

Случайная величина x называется безгранично делимой, если для любого натурального n ее можно представить как сумму

$$x=x_1+x_2+\ldots+x_n$$

n независимых случайных величин с одним и тем же з. р.

Из определения следует, что любая положительная степень х. ф. безгранично делимого з. р. также является х. ф. некоторого з. р.

Лемма 1. Характеристическая функция безгранично делимого з. р. ни при одном действительном значении аргумента не обращается в нуль.

Доказательство см. в работе А. Я. Хинчина ([15]), теорема 3.

ТЕОРЕМА 1. *Класс безгранично делимых з. р. замкнут относительно предельного перехода.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{\Phi_k(x)\}$ безгранично делимых з. р. сходится к предельному з. р. $\Phi(x)$. Это означает, что

$$\varphi_k(t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(t) \tag{1}$$

равномерно в каждом конечном интервале t. Очевидно, что законы $\Phi_k^*(x)$ безгранично делимы и что

$$\varphi_k^*(t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi^*(t)$$

равномерно относительно t в $|t| \leqslant T$.

Так как $\varphi_k^*(t) > 0$ при любом t, то при каждом $\lambda > 0$

$$\varphi_k^{*\lambda}(t) \longrightarrow \varphi^{*\lambda}(t)$$

равномерно относительно t ($|t| \leqslant T$) и, следовательно, $\varphi^{*\lambda}(t)$ при любом $\lambda > 0$ является х. ф. некоторого закона. Отсюда, на основании леммы 1 и определения безгранично делимых законов, мы заключаем, что

$$\varphi^*(t) = |\varphi(t)|^2 > 0$$

при любом t. В силу этого неравенства мы заключаем, что (1) эквивалентно равномерной относительно t ($|t| \leqslant T$) сходимости

$$\rho_k(t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \rho(t), \quad \omega_k(t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \omega(t).$$

Теперь очевидно, что при любом $\lambda > 0$

$$\varphi_k^{\lambda}(t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi^{\lambda}(t)$$

равномерно относительно t ($|t| \leqslant T$), т. е. что $\varphi^{\lambda}(t)$ — х. ф. и что, следовательно, закон $\Phi(x)$ безгранично делим.

Лемма 2. Для того чтобы закон распределения $\Phi(x)$ был безгранично делимым, необходимо и достаточно, чтобы логарифм его х. ф. был вида

$$\lg \varphi(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2} \right\} \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u), \tag{2}$$

где γ — действительное постоянное, а $G(u)$ — неубывающая функция с ограниченной вариацией.

Доказательство см. в работе А. Я. Хинчина ([17]).

Формулу (2) мы будем называть формулой П. Леви (P. Lévy).

Условимся считать, что функция $G(u)$ удовлетворяет условию $G(-\infty)=0$. Очевидно, что это условие не ограничивает общности формулы П. Леви.

Для дальнейшего существенно заметить, что константа γ и функция $G(u)$ определяются по з. р. $\Phi(x)$ однозначно, т. е. что х. ф. $\varphi(t)$ безгранично делимого з. р. может быть представлена в форме (2) одним единственным способом. То же относится и к приводимым ниже представлениям (3) и (4), в последнем случае с точностью до свободы выбора величины τ.

Сам П. Леви придал формуле для логарифма х. ф. безгранично делимого закона несколько иной вид, именно:

$$\lg\varphi(t)=i\gamma t-\frac{a^2t^2}{2}+\int\limits_{-\infty}^{-0}\left(e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\right)dM(u)+\int\limits_{+0}^{+\infty}\left(e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\right)dN(u), \tag{3}$$

где γ и a — действительные постоянные, а $M(u)$ и $N(u)$ — неубывающие функции, определенные соответственно в интервалах $(-\infty,\ -0)$, $(+0,\ +\infty)$, удовлетворяющие условиям $M(-\infty)=N(+\infty)=0$,

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{-0}u^2\,dM(u)+\int\limits_{+0}^{+\varepsilon}u^2\,dN(u)<+\infty \quad \text{для каждого } \varepsilon>0.$$

Для того чтобы в дальнейшем избежать ненужных вычислений, мы приведем еще одну форму формулы П. Леви:

$$\lg\varphi(t)=i\gamma(\tau)t-\frac{1}{2}a^2t^2+\int\limits_{-\infty}^{-\tau}(e^{iut}-1)\,dM(u)+\int\limits_{\tau}^{+\infty}(e^{iut}-1)\,dN(u)+\int\limits_{-\tau}^{-0}(e^{iut}-1-iut)\,dM(u)+\int\limits_{+0}^{\tau}(e^{iut}-1-iut)\,dN(u). \tag{4}$$

Здесь функции $M(u)$ и $N(u)$, а также постоянное a сохраняют смысл, приданный им в формуле (3), постоянное $\gamma(\tau)$ связано с постоянным γ формулы (3) зависимостью

$$\gamma(\tau)=\gamma-\int\limits_{-\infty}^{-\tau}\frac{u}{1+u^2}\,dM(u)-\int\limits_{\tau}^{+\infty}\frac{u}{1+u^2}\,dN(u)+\int\limits_{-\tau}^{-0}\frac{u^3}{1+u^2}\,dM(u)+\int\limits_{+0}^{\tau}\frac{u^3}{1+u^2}\,dN(u);$$

τ — любое положительное постоянное число, удовлетворяющее тому условию, что $-\tau$ является точкой непрерывности функции $M(u)$, а τ — точкой непрерывности функции $N(u)$.

ТЕОРЕМА 2. *Для сходимости последовательности* $\{\Phi_n(x)\}$ *безгранично делимых з. р. к предельному з. р.* $\Phi(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

1° *функции* $G_n(u)$, *определенные по формуле П. Леви* (2) *для законов* $\Phi_n(x)$, *сходились к функции* $G(u)$, *относящейся к закону* $\Phi(x)$, *в каждой ее точке непрерывности;*

2° *полные вариации функций* $G_n(u)$ *сходились к полной вариации функции* $G(u)$;

3° *постоянные* γ_n, *определенные по формуле П. Леви для законов* $\Phi_n(x)$, *сходились к постоянной* γ *для закона* $\Phi(x)$.

Доказательство необходимости. По условию

$$L_n(t)=i\gamma_n t+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\right\}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}L(t)=$$

$$=i\gamma t+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\right\}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)$$

равномерно в каждом конечном интервале t $(|t|\leqslant T)$. Отсюда заключаем, что

$$R(L_n)=\int_{-\infty}^{\infty}(\cos ut-1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}R(L)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\cos ut-1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u).$$

Докажем, что функции $G_n(u)$ ограничены в совокупности. Для этого введем обозначения

$$B_n=\int_{-1}^{1}dG_n(u),\qquad C_n=\int_{|u|\geqslant 1}dG_n(u).$$

Ясно, что при любом $\varepsilon>0$ для достаточно больших n

$$-R(L(1))+\varepsilon>\int_{-1}^{1}(1-\cos u)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u)>\alpha B_n, \tag{5}$$

где

$$\alpha=\min_{|u|<1}(1-\cos u)\frac{1+u^2}{u^2}>\frac{11}{24}.$$

Дальше, при любом $\varepsilon>0$ и для достаточно больших n

$$-R(L(t))+\varepsilon>-R(L_n(t))\geqslant\int_{|u|\geqslant 1}(1-\cos ut)\,dG_n(u).$$

Берем среднее значение в интервале $0\leqslant t\leqslant 2$ функций, стоящих в правой и левой частях этого неравенства:

$$-\frac{1}{2}R\left(\int_0^2 L(t)\,dt\right)+\varepsilon\geqslant C_n-\frac{1}{2}\int_{|u|\geqslant 1}\frac{\sin 2u}{u}\,dG_n(u)\geqslant\frac{1}{2}C_n. \tag{6}$$

Так как $R(L(1))$ и $\int\limits_0^2 R(L(t))\,dt$ — величины конечные, то из (5) и (6) ясно, что функции $G_n(u)$ ограничены в совокупности.

В силу первой теоремы Хелли (см. например ([3]), стр. 61) множество функций $\{G_n(u)\}$ имеет по меньшей мере одну предельную, а в силу единственности представления безгранично делимых законов формулой П. Леви оно может иметь только одну предельную, именно $G(u)$. Необходимость первого требования теоремы доказана.

Согласно предположению для любого $\varepsilon > 0$ в каждом конечном интервале t ($|t| \leqslant T$), начиная с некоторого n, выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\cos ut - 1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\cos ut - 1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (7)$$

Пусть $\alpha > 1$, $\beta > 1$ достаточно велики (их выбор мы произведем позже) и $u = -\alpha$, $u = \beta$ являются точками непрерывности функции $G(u)$. Согласно второй теореме Хелли (([3]), стр. 65) последовательность интегралов

$$\int\limits_{-\alpha}^{\beta} (\cos ut - 1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u)$$

сходится к интегралу

$$\int\limits_{-\alpha}^{\beta} (\cos ut - 1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u).$$

Следовательно, для достаточности больших значений n

$$\left|\int\limits_{-\alpha}^{\beta} (\cos ut - 1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u) - \int\limits_{-\alpha}^{\beta} (\cos ut - 1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этого и (7) неравенств получаем следующее:

$$\left|\int\limits_{\substack{u<-\alpha\\u>\beta}} (\cos ut - 1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u) - \int\limits_{\substack{u<-\alpha\\u>\beta}} (\cos ut - 1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\right| < \varepsilon$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_{\substack{u<-\alpha\\u>\beta}} (1 - \cos ut)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u) < \varepsilon + \int\limits_{\substack{u<-\alpha\\u>\beta}} (1 - \cos ut)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u).$$

Берем для обеих частей этого неравенства среднее значение в интервале $0 \leqslant t \leqslant 2$

$$\int\limits_{\substack{u<-\alpha\\u>\beta}} \left(1 - \frac{\sin 2u}{2u}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u) < \varepsilon + \int\limits_{\substack{u<-\alpha\\u>\beta}} \left(1 - \frac{\sin 2u}{2u}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u). \qquad (8)$$

Выберем теперь α и β так, чтобы

$$\int\limits_{\substack{u<-\alpha\\u>\beta}} dG(u) < \varepsilon.$$

Легко подсчитать, что

$$\frac{1}{4}\int\limits_{\substack{u<-\alpha\\u>\beta}} dG_n(u) < \int\limits_{\substack{u<-\alpha\\u>\beta}} \left(1-\frac{\sin 2u}{2u}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u)$$

и

$$\int\limits_{\substack{u<-\alpha\\u>\beta}} \left(1-\frac{\sin 2u}{2u}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u) < \int\limits_{\substack{u<-\alpha\\u>\beta}} dG(u) < \varepsilon.$$

Неравенство (8) при учете только что написанных неравенств дает

$$\frac{1}{4}\int\limits_{\substack{u<-\alpha\\u>\beta}} dG_n(u) < 2\varepsilon.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} G_n(-\alpha) = G(-\alpha), \qquad \lim_{n\to\infty} G_n(\beta) = G(\beta)$$

и $\varepsilon > 0$ может быть выбрано по нашему произволу, то тем самым необходимость второго условия теоремы доказана.

Приступим к доказательству необходимости третьего требования теоремы. По предположению равномерно в $|t| \leqslant T$

$$I(L_n(t)) = \gamma_n t + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sin ut - \frac{ut}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I(L(t)) =$$

$$= \gamma t + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sin ut - \frac{ut}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u).$$

В силу уже доказанных требований теорем 1 и 2, по обобщенной В. И. Гливенко второй теореме Хелли [(3), стр. 67] заключаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sin ut - \frac{ut}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sin ut - \frac{ut}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u).$$

Из сравнения этих двух предельных соотношений при $t = 1$ получаем

$$\gamma_n \longrightarrow \gamma.$$

Доказательство достаточности. Достаточность условий является тривиальным следствием обобщенной второй теоремы Хелли ((5), стр. 67) и предельной теоремы для характеристических функций в формулировке В. И. Гливенко ((3), стр. 124).

В дальнейшем нам понадобится также другая форма необходимых и достаточных условий сходимости безгранично делимых з. р.

ТЕОРЕМА 3. *Для сходимости последовательности $\Phi_n(x)$ безгранично делимых з. р. к предельному закону $\Phi(x)$ необходимо и достаточно, чтобы*

1° $M_n(u) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M(u)$ *для* $u<0$ *и* $N_n(u) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} N(u)$ *для* $u>0$ *в точках непрерывности функций* $M(u)$ *и* $N(u)$;

2° $\displaystyle\int\limits_{-\varepsilon}^{-0} u^2\,dM_n(u) + \int\limits_{+0}^{\varepsilon} u^2\,dN_n(u) + a_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{-\varepsilon}^{-0} u^2\,dM(u) + \int\limits_{+0}^{\varepsilon} u^2\,dN(u) + a^2$

для каждого $\varepsilon > 0$;

3° $\gamma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$.

Функции $M(u), N(u), M_n(u), N_n(u)$ *и постоянные* α, γ и α_n, γ_n *определяются по формуле* (3) *для з. р.* $\Phi(x)$ *и* $\Phi_n(x)$.

Доказательства этой теоремы мы не приводим, так как она легко выводится из теоремы 2.

Заметим, что если для з. р. $\Phi_n(x)$ мы пользуемся формулой П. Леви в форме (4), то в теореме 3 условие 3° нужно заменить условием

3°′ $\gamma_n(\tau) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma(\tau)$,

где $\gamma_n(\tau)$ и $\gamma(\tau)$ определяются по формуле (4) для з. р. $\Phi_n(x)$ и $\Phi(x)$.

§ 2. О сходимости законов распределения сумм

Дана последовательность серий

$$x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk_n} \tag{1}$$

независимых в каждой серии случайных величин, предельно пренебрегаемых при $n \to \infty$ равномерно относительно второго значка. З. р. этих величин обозначим соответственно через

$$F_{n1}(x), F_{n2}(x), \ldots, F_{nk_n}(x).$$

В силу предельной пренебрегаемости величин x_{nk} имеем

$$\rho_{nk}(t) \to 1, \quad \omega_{nk}(t) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty \tag{2}$$

равномерно относительно k $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ и t в любом конечном интервале t.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы произведения*

$$\prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) \tag{3}$$

х. ф. $f_{nk}(t)$, *удовлетворяющих условию* (2), *сходились равномерно относительно* t $(|t| \leqslant T)$ *к предельной функции* $f(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы суммы*

$$\sum_{k=1}^{k_n} \{i\omega_{nk}(1) + f_{nk}(t) \cdot e^{-i\omega_{nk}(1)t} - 1\} \tag{4}$$

сходились равномерно относительно t $(|t| \leqslant T)$ *к предельной функции* $\varphi(t)$.

Предельные функции $f(t)$ *и* $\varphi(t)$ *связаны между собой зависимостью*

$$f(t) = e^{\varphi(t)}.$$

Доказательство*. Предположим сначала, что все $f_{nk}(t)$ действительны. Обозначим

$$1 - f_{nk}(t) = \psi_{nk}(t).$$

В силу условия (2) $\psi_{nk}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ равномерно относительно k $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ и t в каждом конечном интервале. Имеем

$$\lg \prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \lg(1 - \psi_{nk}(t)) = -\sum_{k=1}^{k_n} \psi_{nk}(t) + \sum_{k=1}^{k_n} O(\psi_{nk}^2(t)).$$

* Идея настоящего доказательства заимствована мной у А. Я. Хинчина [(15), Hauptsatz I].

Но

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{k_n} O\left(\psi_{nk}^2(t)\right) \leqslant C \sum_{k=1}^{k_n} \psi_{nk}(t) \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \psi_{nk}(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \psi_{nk}(t) \cdot o(1).$$

Таким образом

$$\lg \prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) = -\sum_{k=1}^{k_n} \psi_{nk}(t)\left(1 + o(1)\right).$$

Это равенство доказывает нашу теорему для случая симметричных з. р. $F_{nk}(x)$. Так как $-\psi_{nk}(t)$ представляют собой логарифмы х. ф. безгранично делимых з. р., то функция $f(t)$, предельная для произведений (3), является в силу теоремы 1 х. ф. безгранично делимого з. р. и, следовательно, отлична от нуля при всех значениях t $(-\infty < t < +\infty)$.

Теперь перейдем к общему случаю. Если

$$\prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(t) \tag{5}$$

равномерно в $|t| \leqslant T$, то, очевидно, что также

$$\prod_{k=1}^{k_n} \overset{*}{f}_{nk}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} \overset{*}{f}(t) = |f(t)|^2.$$

На основании только что рассмотренного частного случая заключаем, что $|f(t)| > 0$, т. е. что $f(t)$ ни при одном действительном t не обращается в нуль. Отсюда следует, что (5) эквивалентно равномерной в $|t| \leqslant T$ сходимости

$$\prod_{k=1}^{k_n} \rho_{nk}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} \rho(t), \quad \sum_{k=1}^{k_n} \omega_{nk}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} \omega(t). \tag{6}$$

Заключаем, что, в частности, если имеет место соотношение (5), то суммы

$$\sum_{k=1}^{k_n} \omega_{nk}(1) \xrightarrow[n \to \infty]{} \omega(1) \tag{6'}$$

сходятся к конечной величине $\omega(1)$.

Точно так же, если сходится к пределу сумма (4), то $\sum_{k=1}^{k_n} \omega_{nk}(1)$ стремится к конечному пределу. Это следует из того факта, что при $t = 1$ мнимая часть (4) сводится к сумме $\sum_{k=1}^{k_n} \omega_{nk}(1)$. Отсюда мы заключаем, что если сходятся произведения (3), то также сходятся произведения $\prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) e^{-i\omega_{nk}(1)t}$ и если сходятся суммы (4), то также сходятся суммы

$$\sum_{k=1}^{k_n} \left(f_{nk}(t) e^{-i\omega_{nk}(1)t} - 1\right).$$

Введем обозначения:

$$\bar{\bar{f}}_{nk}(t) = f_{nk}(t)\, e^{-i\omega_{nk}(1)t} = \rho_{nk}(t)\, e^{i\omega_{nk}(t) - i\omega_{nk}(1)t},$$

$$\varepsilon_{nk}(t) = 1 - \rho_{nk}(t), \quad \bar{\bar{\omega}}_{nk}(t) = \omega_{nk}(t) - i\omega_{nk}(1)\, t.$$

Мы имеем

$$\lg \bar{\bar{f}}_{nk}(t) = \lg\left[1 - (1 - \bar{\bar{f}}_{nk}(t))\right] =$$
$$= -(1 - \bar{\bar{f}}_{nk}(t)) - \frac{1}{2}(1 - \bar{\bar{f}}_{nk}(t))^2 - \frac{1}{3}(1 - \bar{\bar{f}}_{nk}(t))^3 - \ldots$$

Так как

$$1 - \bar{\bar{f}}_{nk}(t) = 1 - (1 - \varepsilon_{nk}(t))\, e^{i\omega_{nk}(t)} =$$
$$= \varepsilon_{nk}(t) - i\bar{\bar{\omega}}_{nk}(t) + o(\varepsilon_{nk}(t)) + O(\bar{\bar{\omega}}^2_{nk}(t))$$

и так как ((15), стр. 88—89)

$$\bar{\bar{\omega}}^2_{nk}(t) = o(\varepsilon_{nk}(t) + \varepsilon_{nk}(1)) \tag{7}$$

равномерно относительно t $(|t| \leqslant T)$, то

$$1 - \bar{\bar{f}}_{nk}(t) = \varepsilon_{nk}(t) - i\bar{\bar{\omega}}_{nk}(t) + o(\varepsilon_{nk}(t) + \varepsilon_{nk}(1)).$$

Следовательно,

$$\lg \prod_{k=1}^{k_n} \bar{\bar{f}}_{nk}(t) = \sum_{k=1}^{k_n} (\bar{\bar{f}}_{nk}(t) - 1) + \sum_{k=1}^{k_n} o(\varepsilon_{nk}(t) + \varepsilon_{nk}(1)) \tag{8}$$

или, что то же самое,

$$\lg \prod_{k=1}^{k_n} \bar{\bar{f}}_{nk}(t) = \sum_{k=1}^{k_n} (\bar{\bar{f}}_{nk}(t) - 1) + \sum_{k=1}^{k_n} o(|\lg \rho_{nk}(t) + \lg \rho_{nk}(1)|). \tag{8'}$$

Если

$$\prod_{k=1}^{k_n} \bar{\bar{f}}_{nk}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{\bar{f}}(t),$$

то равномерно в каждом конечном интервале t

$$\prod_{k=1}^{k_n} \rho_{nk}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(t) > 0$$

и; следовательно, в силу (8′) равномерно относительно t $(|t| \leqslant T)$,

$$\lg \prod_{k=1}^{k_n} \bar{\bar{f}}_{nk}(t) - \sum_{k=1}^{k_n} (\bar{\bar{f}}_{nk}(t) - 1) = o(1).$$

Этим доказана необходимость условия теоремы.

Если равномерно в $|t| \leqslant T$

$$\sum_{k=1}^{k_n} (\bar{\bar{f}}_{nk}(t) - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t),$$

то также равномерно в $|t| \leqslant T$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \{\rho_{nk}(t) \cos \bar{\bar{\omega}}_{nk}(t) - 1\} \xrightarrow[n\to\infty]{} R\{\varphi(t)\},$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{k_n}\left\{(1-\varepsilon_{nk}(t))\left[1+O\left(\bar{\bar{\omega}}_{nk}^2(t)\right)\right]-1\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{k_n}\left(-\varepsilon_{nk}(t)+o\left(\varepsilon_{nk}(t)+\varepsilon_{nk}(1)\right)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} R\{\varphi(t)\}.$$

Отсюда мы заключаем, что равномерно в $|t|\leqslant T$

$$-\sum_{k=1}^{k_n}\varepsilon_{nk}(t)\xrightarrow[n\to\infty]{} R\{\varphi(t)\}.$$

Следовательно, в силу (8) равномерно относительно t ($|t|\leqslant T$)

$$\lg\prod_{k=1}^{k_n}\bar{\bar{f}}_{nk}(t)-\sum_{k=1}^{k_n}\{\bar{\bar{f}}_{nk}(t)-1\}=o(1).$$

Этим доказана достаточность требования теоремы. Теорема таким образом доказана полностью.

Вероятностный смысл доказанной теоремы состоит в том, что она позволяет в теории предельных законов для сумм независимых случайных величин ограничиться рассмотрением сумм независимых безгранично делимых случайных величин. Точнее — она показывает, что з. р. сумм

$$s_n=x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nk_n}$$

предельно пренебрегаемых независимых слагаемых в случае сходимости их к предельному з. р. сближаются с з. р. сумм

$$s'_n=x'_{n1}+x'_{n2}+\ldots+x'_{nk_n}$$

безгранично делимых слагаемых x'_{nk}, подчиненных законам, определяемым посредством логарифмов своих х. ф.

$$\lg\varphi'_{nk}(t)=i\omega_{nk}(1)\cdot t+\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1)\,dF_{nk}(x+\omega_{nk}(1)).$$

Частный случай только что доказанной теоремы был получен Г. М. Бавли ([1]). Бавли предполагал существование Ex_{nk}, Ex_{nk}^2 и требовал ограниченность (в совокупности) $E(s_n-Es_n)^2$.

Гипотеза о возможности приближения сумм предельно пренебрегаемых слагаемых безгранично делимыми величинами неоднократно высказывалась А. Н. Колмогоровым.

Теореме 4 мы придадим вероятностную формулировку:

ТЕОРЕМА 4′. *Для того чтобы последовательность з. р. сумм*

$$s_n=x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nk_n}$$

независимых предельно пренебрегаемых случайных величин сходилась при $n\to\infty$ к предельному закону, необходимо и достаточно, чтобы к пре-

дельному закону сходились безгранично делимые з. р. $\Phi_n(x)$, определенные посредством логарифмов х. ф.

$$\lg \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ i\omega_{nk}(1)\, t + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \right\}.$$

Предельные законы для обеих последовательностей совпадают.

В качестве непосредственного следствия этой теоремы (и теоремы 1) мы получаем следующую теорему А. Я. Хинчина ([15]), разрешающую проблему 3, указанную во введении, для схемы А. Н. Колмогорова.

Теорема Хинчина. Класс предельных законов для сумм независимых, пренебрегаемых в пределе случайных величин совпадает с классом безгранично делимых законов.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме каждый предельный для сумм независимых слагаемых з. р. является пределом для последовательности безгранично делимых з. р. и, следовательно, на основании теоремы 1 он и сам также является безгранично делимым. Обратное предложение, что каждый безгранично делимый закон является предельным для з. р. сумм независимых случайных величин, есть простое следствие определения безгранично делимых законов.

Мы выделим три частных случая теоремы 4:

Случай 1. Если все величины x_{nk} $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ одинаково распределены по закону $F_n(x)$, то для сходимости з. р. сумм

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n} \tag{9}$$

к предельному необходимо и достаточно, чтобы последовательность функций

$$k_n \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_n(x)$$

сходилась к предельной равномерно в каждом конечном интервале t.

Доказательство. Для сходимости з. р. сумм (9), как мы знаем из теоремы 4′, необходима и достаточна сходимость функций $\psi_n(t)$,

$$\psi_n(t) = ik_n\omega_n(1)\, t + k_n \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_n(x + \omega_n(1))$$

равномерно в каждом конечном интервале t. Мы имеем

$$\psi_n(t) = ik_n\omega_n(1)\, t + k_n(e^{i\omega_n(1)t} - 1) + k_n e^{i\omega_n(1)t} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_n(x) =$$

$$= k_n O(\omega_n^2(1)) + k_n(1 + o(1)) \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_n(x)$$

равномерно в каждом конечном интервале t. При доказательстве теоремы 4 было обнаружено (6′), что

$$\sum_{k=1}^{k_n} \omega_{nk}(1) = k_n\omega_n(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \text{const}.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$k_n\omega_n^2(1) = o(1),$$

что и требовалось доказать.

Случай 2 (теорема Бавли). Если з. р. независимых случайных величин x_{nk} имеют конечные вторые моменты и

$$Ex_{nk} = 0, \ Ex_{nk}^2 = b_{nk}, \ \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} b_{nk}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \text{ и } \ \sum_{k=1}^{k_n} b_{nk} < C,$$

где C — постоянное, не зависящее от n, то необходимым и достаточным условием сходимости з. р. сумм

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

к предельному является сходимость к предельной функции сумм

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x)$$

равномерно в каждом конечном интервале t.

Доказательство. В этом случае проще произвести доказательство непосредственно, чем исходить из теоремы 4'. Мы имеем

$$\sigma_n = \left| \lg \prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) - \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x) \right|^2 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{k_n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x) \right|^3 + \ldots$$

Но

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx)\, dF_{nk}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dF_{nk}\ x) = \frac{t^2}{2} b_{nk}.$$

Теперь ясно, что в $|t| \leqslant T$

$$\sigma_n \leqslant \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{k_n} b_{nk}^2 t^4 + \frac{1}{24} \sum_{k=1}^{k_n} b^3\ \ t^6 + \ldots < \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{k_n} \frac{b_{nk}^2 t^4}{1 - b_{nk} t^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} T^4 C \frac{\max b_{nk}}{1 - T^2 \max b_{nk}} = o(1),$$

что и требовалось доказать.

Случай 3. Если з. р. случайных величин x_{nk}, независимых в каждой серии ($1 \leqslant k \leqslant k_n$), имеют математические ожидания и

$$E|x_{nk}| = c_{nk}, \quad \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} c_{nk} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \sum_{k=1}^{k_n} c_{nk} < C,$$

то необходимым и достаточным условием сходимости з. р. сумм к предельному является сходимость сумм

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x)$$

равномерно в каждом конечном интервале t.

Доказательство. Здесь снова есть смысл проводить доказательство непосредственно. Очевидно, что

$$\left| \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{itx} - 1 \right| dF_{nk}(x) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{k_n} |t| \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, dF_{nk}(x) \leqslant Ct.$$

Отсюда мы заключаем, что в каждом конечном интервале t $(|t| < T)$

$$\left| \sum_{k=1}^{k_n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right| \leqslant CT \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x) \right| = o(1).$$

Таким образом

$$\left| \lg \prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) - \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x) \right| = o(1)$$

равномерно в каждом конечном интервале t, что и требовалось доказать.

Доказательства, приведенные для случаев 2 и 3 теоремы 4′, позволяют обнаружить более общие закономерности, чем те, которые были сформулированы. Именно в силу леммы Г. М. Бавли [(1), § 2] имеет место следующая теорема.

Теорема. Если последовательность серий

$$x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk_n}$$

независимых в каждой серии случайных величин удовлетворяет условиям случая 2 или случая 3 теоремы 4′, то последовательность законов распределения $F_n(x)$ сумм

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

сближается с последовательностью $\{\Phi_n(x)\}$ безгранично делимых законов, определяемых логарифмами х. ф.

$$\lg \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, dF_{nk}(x)$$

по мере; иначе говоря, в этих условиях разность $F_n(x) - \Phi_n(x)$ при $n \to \infty$ сходится по мере к нулю.

Эта теорема в предположении условий случая 2 теоремы 4′ была доказана Г. М. Бавли (1).

§ 3. Условия сходимости к предельным законам

Мы дадим в этом параграфе решение проблемы 4 введения для схемы А. Н. Колмогорова. Этот результат мы приведем в нескольких видах.

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы з. р. сумм*

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nk_n} \tag{1}$$

предельно пренебрегаемых и независимых в каждой серии слагаемых сходились к некоторому предельному з. р., необходимо и достаточно, чтобы существовали неубывающая функция $G(u)$ с ограниченным изменением и действительная постоянная γ такие, что

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(u)$$

в каждой точке непрерывности $G(u)$,

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(+\infty),$$

$$3^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \omega_{nk}(1) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma.$$

Логарифм х. ф. предельного закона дается формулой П. Леви (2) § 1, в которой постоянная γ и функция $G(u)$ определены условиями $1^\circ - 3^\circ$ теоремы.

Доказательство. Приведенная теорема является простым следствием теорем 1, 2 и 4′. Действительно, в силу теоремы 4′ для сходимости з. р. сумм (1), необходима и достаточна сходимость последовательности безгранично делимых законов распределения с х. ф.

$$\lg \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ i\omega_{nk}(1) + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ixt} - 1)\, dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \right\}.$$

Для того чтобы привести это выражение к привычному виду формулы П. Леви (2) § 1, мы должны положить

$$G_n(u) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)),$$

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \omega_{nk}(1) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \right\}.$$

Применение теоремы 2 приводит к условиям теоремы.

Из теорем 1, 3, 4′ также непосредственно вытекает другая форма необходимых и достаточных условий для сходимости к какому-нибудь предельному з. р.

ТЕОРЕМА 6. *Для сходимости з. р. сумм*

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nk_n}$$

независимых в каждой серии предельно пренебрегаемых слагаемых к предельному, необходимо и достаточно, чтобы существовали неубывающие функции $M(u)$ $(M(-\infty)=0)$ *и* $N(u)$ $(N(+\infty)=0)$ *и постоянные* a *и* γ *такие, что*

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{u} dF_{nk}(x+\omega_{nk}(1)) \xrightarrow[n\to\infty]{} M(u) \quad \text{при} \quad u<0,$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} -\int_{u}^{\infty} dF_{nk}(x+\omega_{nk}(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} N(u) \quad \text{при} \quad u>0$$

в точках непрерывности $M(u)$ *и* $N(u)$;

$$2^\circ \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x+\omega_{nk}(1)) \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{} a^2;$$

$$3^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \omega_{nk}(1) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+\omega_{nk}(1)) \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma.$$

Логарифм х. ф. предельного закона дается формулой (3) § 1 с только что определенными функциями $M(u), N(u)$ *и постоянными* a *и* γ.

Мы дадим, наконец, нашу теорему в форме, которой и будем пользоваться в дальнейших исследованиях.

ТЕОРЕМА 7. *Для сходимости з. р. сумм*

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

независимых в каждой серии, пренебрегаемых в пределе случайных величин к некоторому предельному необходимо и достаточно, чтобы существовали такие неубывающие функции $M(u)$ *и* $N(u)$, *подчиненные условиям* $M(-\infty)=N(+\infty)=0$ *и* $\int_{-\varepsilon}^{-0} u^2\, dM(u) + \int_{+0}^{\varepsilon} u^2 dN(u) < C < +\infty$ *при любом* $\varepsilon>0$, *и такие постоянные* $a>0$, τ и $\gamma(\tau)$, *что* $-\tau$ и $+\tau$ *являются точками непрерывности функций* $M(u)$ *и* $N(u)$ *и*

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{u} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} M(u) \quad \text{для} \quad u<0,$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} -\int_{u}^{\infty} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} N(u) \quad \text{для} \quad u>0$$

в точках непрерывности функций $M(u)$ *и* $N(u)$;

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma(\tau),$$

$$3^\circ \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} a^2.$$

Логарифм х. ф. предельного закона дается формулой П. Леви (4) § 1 с только что определенными функциями $M(u)$, $N(u)$ и постоянными a и $\gamma(\tau)$.

Доказательство. В силу примечания к теореме 3 при представлении безгранично делимых законов по формуле П. Леви в форме (4) § 1 два первые условия теоремы 6 сохраняются, а третье заменяется условием

$$3^{\circ\prime} \quad \gamma_n(\tau) = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \omega_{nk}(1) + \int_{|x|<\tau} x\,dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma(\tau).$$

Легко видеть, что

$$\gamma_n(\tau) = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \omega_{nk}(1) \int_{|x-\omega_{nk}(1)|\geq\tau} dF_{nk}(x) + \int_{|x-\omega_{nk}(1)|<\tau} x\,dF_{nk}(x) \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma(\tau).$$

В силу условия 1° теоремы 3

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-\omega_{nk}(1)|\geq\tau} dF_{nk}(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|\geq\tau} dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \leq$$

$$\leq M(-\tau+0) + |N(\tau-0)| = C(\tau) < +\infty. \tag{2}$$

Так как $\max\limits_{1\leq k\leq k_n} |\omega_{nk}(1)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то ясно, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} \omega_{nk}(1) \int_{|x-\omega_{nk}(1)|\geq\tau} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом условие 3°′ может быть приведено к виду

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-\omega_{nk}(1)|<\tau} x\,dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma(\tau). \tag{3}$$

Условия 1° и 2° теоремы 6 могут быть записаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{u-\omega_{nk}(1)} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} M(u), \\ &\sum_{k=1}^{k_n} - \int_{u-\omega_{nk}(1)}^{\infty} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} N(u) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

в точках непрерывности $M(u)$ и $N(u)$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-\omega_{nk}(1)|<\varepsilon} (x - \omega_{nk}(1))^2\,dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} a^2. \tag{5}$$

Покажем, что в (3), (4) и (5) можно в пределах интегрирования откинуть $\omega_{nk}(1)$.

Обозначим

$$\omega_n(1) = \max_{1\leq k\leq k_n} |\omega_{nk}(1)|.$$

Так как u является точкой непрерывности $M(u)$, то

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{u-\omega_{nk}(1)-\omega_n(1)} dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} M(u),$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{u-\omega_{nk}(1)+\omega_n(1)} dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} M(u).$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{u-\omega_{nk}(1)-\omega_n(1)} dF_{nk}(x)\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{u} dF_{nk}(x)\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{u-\omega_{nk}(1)+\omega_n(1)} dF_{nk}(x).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{u} dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} M(u).$$

Подобным же образом мы обнаруживаем, что

$$\sum_{k=1}^{k_n}-\int_{u}^{\infty} dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} N(u).$$

Очевидно, что

$$\left|\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x-\omega_{nk}(1)|<\tau} x\,dF_{nk}(x)-\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\tau} x\,dF_{nk}(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}2\tau\left\{\left|\int_{\tau}^{\tau+\omega_{nk}(1)} dF_{nk}(x)\right|+\left|\int_{-\tau+\omega_{nk}(1)}^{-\tau} dF_{nk}(x)\right|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2\tau\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int_{\tau-\omega_n(1)}^{\tau+\omega_n(1)} dF_{nk}(x)+\int_{-\tau-\omega_n(1)}^{-\tau+\omega_n(1)} dF_{nk}(x)\right\}=$$

$$=2\tau\{N(\tau+\omega_n(1))-N(\tau-\omega_n(1))+M(-\tau+\omega_n(1))-M(-\tau-\omega_n(1))+o(1)\}.$$

Последняя скобка в силу непрерывности $M(u)$ и $N(u)$ в точках $-\tau$ и τ стремится к нулю. Таким образом мы доказали, что условие $3^{\circ\prime}$ эквивалентно условию 3° теоремы.

Аналогичным приемом доказывается, что

$$a^2=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x+\omega_{nk}(1))=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon}(x-\omega_{nk}(1))^2\,dF_{nk}(x). \tag{6}$$

Нам остается показать, что в (6) можно $\omega_{nk}(1)$ заменить $\int\limits_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x)$.

Для этого рассмотрим

$$\rho_{nk}(t)\sin\overline{\overline{\omega}}_{nk}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\sin xt\,dF_{nk}(x+\overline{\overline{\omega}}_{nk}(1)).$$

На основании соотношения (7) § 2, $\bar{\bar{\omega}}^2_{nk}(t) = o(\varepsilon_{nk}(t) + \varepsilon_{nk}(1))$, имеем

$$\left(\sin \bar{\bar{\omega}}_{nk}(t) = \bar{\bar{\omega}}_{nk}(t) - \frac{\bar{\bar{\omega}}^3_{nk}}{3\,!} + \ldots = \bar{\bar{\omega}}_{nk}(t) + o(\varepsilon_{nk}(t) + \varepsilon_{nk}(1))\right),$$

$$\bar{\bar{\omega}}_{nk}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin xt \, dF_{nk}(x + \bar{\bar{\omega}}_{nk}(1)) + o(\varepsilon_{nk}(t) + \varepsilon_{nk}(1)).$$

Отсюда находим, что

$$\omega_{nk}(t) = \int\limits_{|x|<\varepsilon} tx \, dF_{nk}(x) + \int\limits_{|x+\omega_{nk}(1)|<\varepsilon} (\sin xt - xt) \, dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) +$$

$$+ \int\limits_{|x+\omega_{nk}(1)|\geqslant\varepsilon} (\sin xt + \omega_{nk}(1)\, t) \, dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) + o(\varepsilon_{nk}(t) + \varepsilon_{nk}(1)),$$

и, следовательно,

$$\omega_{nk}(1) = \int\limits_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) + \int\limits_{|x+\omega_{nk}(1)|\;\varepsilon} (\sin x - x) \, dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) +$$

$$+ \int\limits_{|x+\omega_{nk}(1)|\geqslant\varepsilon} (\sin x + \omega_{nk}(1)) \, dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) + o(\varepsilon_{nk}(1)).$$

В результате элементарных подсчетов мы получаем, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\varepsilon} (x - \omega_{nk}(1))^2 \, dF_{nk}(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int\limits_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_n} \left(\int\limits_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \int\limits_{|x|>\varepsilon} dF_{nk}(x) + o\left(\sum_{k=1}^{k_n} (\varepsilon_{nk}(1)) \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_n} \left[\left(\int\limits_{|x+\omega_{nk}(1)|<\varepsilon} (\sin x - x) \, dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_{|x+\omega_{nk}(1)|\geqslant\varepsilon} (\sin x + \omega_{nk}(1)) \, dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \right)^2 \right] \int\limits_{|x|<\varepsilon} dF_{nk}(x) -$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \int\limits_{|x+\omega_{nk}(1)|<\varepsilon} (\sin x - x) \, dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \int\limits_{|x|>\varepsilon} dF_{nk}(x) -$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \int\limits_{|x+\omega_{nk}(1)|>\varepsilon} (\sin x + \omega_{nk}(1)) \, dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \int\limits_{|x|>\varepsilon} dF_{nk}(x) +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x+\omega_{nk}(1)|<\varepsilon} (\sin x - x) \, dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \times$$

$$\times \int\limits_{|x+\omega_{nk}(1)|\geqslant\varepsilon} (\sin x + \omega_{nk}(1)) \, dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \int\limits_{|x|<\varepsilon} dF_{nk}(x).$$

В силу очевидного неравенства

$$\left| \int\limits_{|x+\omega_{nk}(1)|\geqslant\varepsilon} (\sin x + \omega_{nk}(1)) \, dF_{nk}(x + \omega_{nk}(1)) \right| \leqslant 2 \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} dF_{nk}(x)$$

и неравенства (первое условие теоремы, уже доказанное)

$$\sum_{k=1}^{k_n} 2 \int_{|x|>\varepsilon} dF_{nk}(x) \leqslant M(-\varepsilon+0) + N(\varepsilon-0) + o(1)$$

мы заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} (x-\omega_{nk}(1))^2 \, dF_{nk}(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} +$$

$$+ o\left(\sum_{k=1}^{k_n} (\varepsilon_{nk}(1)) \right) + \sum_{k=1}^{k_n} \left(\int_{|x+\omega_{nk}(1)|<\varepsilon} (\sin x - x) \, dF_{nk}(x+\omega_{nk}(1)) \right)^2 + o(1).$$

Ясно, что

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{k_n} \left(\int_{|x+\omega_{nk}(1)|<\varepsilon} (\sin x - x) \, dF_{nk}(x) \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \int_{|x+\omega_{nk}(1)|<\varepsilon} |\sin x - x| \, dF_{nk}(x+\omega_{nk}(1)) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x+\omega_{nk}(1)|<\varepsilon} |x|^3 dF_{nk}(x+\omega_{nk}(1)) \leqslant o(1) \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} |x-\omega_{nk}(1)|^3 \, dF_{nk}(x) \leqslant$$

$$\leqslant o(1) \cdot 2\varepsilon \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} (x-\omega_{nk}(1))^2 \, dF_{nk}(x).$$

Так как в силу (6)

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} (x-\omega_{nk}(1))^2 \, dF_{nk}(x) = a^2 + o(1),$$

то

$$\sigma_n = o(1).$$

В § 2 было показано, что

$$o\left(\sum_{k=1}^{k_n} (\varepsilon_{nk}(1)) \right) = o(1).$$

Таким образом мы получаем окончательно, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} (x-\omega_{nk}(1))^2 \, dF_{nk}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} + o(1).$$

Это соотношение завершает доказательство теоремы.

Для дальнейшего нам будет нужна следующая лемма:

Лемма 3. Если при некотором подборе постоянных A_n $(-\infty < A_n < +\infty)$ з. р. сумм

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n} - A_n$$

сходятся к предельному и слагаемые x_{nk} $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ пренебрегаемы в пределе, то $A_n = o(k_n)$.

Доказательство. Согласно предположению при каждом t

$$e^{itA_n} \prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(t),$$

и, следовательно, при $t=1$

$$A_n - \sum_{k=1}^{k_n} \omega_{nk}(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \omega(1).$$

Так как x_{nk} — величины предельно пренебрегаемые, то $\omega_{nk}(1) = o(1)$ равномерно относительно k $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$, и, следовательно,

$$\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_n} \omega_{nk}(1) = o(1).$$

Предыдущее соотношение нам дает теперь

$$\frac{A_n}{k_n} = \frac{1}{k_n}\,\omega(1) + o(1) = o(1),$$

что и требовалось доказать.

Мы докажем теперь теорему, аналогичную предыдущим, но не для схемы Колмогорова, а для классической схемы последовательности независимых случайных величин. Заметим, что если теоремы 5, 6 и 7 дают полное решение проблемы 4 введения для схемы Колмогорова, то теорема 8 эту проблему для классической схемы еще не решает.

ТЕОРЕМА 8. *Даны последовательность независимых случайных величин* $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ с з. р. $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ *и последовательность* $\{B_n\}$ *положительных постоянных таких, что величины* $\frac{x_k}{B_n}$ $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ *пренебрегаемы в пределе. Для того чтобы существовали постоянные* A_n *такие, что з. р. сумм*

$$s_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{k_n}}{B_n} - A_n \tag{7}$$

сходились к предельному, необходимо и достаточно, чтобы существовали неубывающие функции $M(u)$ *и* $N(u)$, *удовлетворяющие условиям*

$$M(-\infty) = N(+\infty) = 0, \quad \int_{-\varepsilon}^{0} u^2\, dM(u) + \int_{0}^{\varepsilon} u^2\, dN(u) < +\infty,$$ *и постоянное* a *такие, что*

$$1^\circ \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{u} dF_k(B_n x) = M(u) \qquad \textit{для } u < 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{u}^{\infty} dF_k(B_n x) = -N(u) \qquad \textit{для } u > 0$$

в точках непрерывности функций $M(u)$ *и* $N(u)$,

$$2^\circ \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_k(B_n x) - \left(\int\limits_{|x|<\varepsilon} x\,dF_k(B_n x)\right)^2\right\} = a^2.$$

При выполнении этих условий постоянные A_n *можно взять равными* ($\gamma(\tau)$ — *некоторое постоянное, зависящее только от* τ)

$$A_n = \sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|<\tau} x\,dF_k(B_n x) - \gamma(\tau) + o(1).$$

Предельный закон дается формулой П. Леви (4) § 1 *с только что определенными функциями* $M(u)$, $N(u)$ *и постоянными* a *и* $\gamma(\tau)$.

Доказательство. Введем обозначение

$$x_{nk} = \frac{x_k}{B_n} - \frac{A_n}{k_n}.$$

Тогда очевидно, что

$$F_{nk}(x) = F_k\left(B_n\left(x + \frac{A_n}{k_n}\right)\right), \quad f_{nk}(t) = f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)e^{-it\frac{A_n}{k_n}},$$

$$\omega_{nk}(1) = \omega_k\left(\frac{1}{B_n}\right) - \frac{A_n}{k_n}.$$

В силу теоремы 6 для сходимости з. р. сумм (7) к предельному необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{-\infty}^{u} dF_k\left(B_n\left(x + \omega_k\left(\frac{1}{B_n}\right)\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M(u) \qquad u<0,$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{u}^{\infty} dF_k\left(B_n\left(x + \omega_k\left(\frac{1}{B_n}\right)\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -N(u) \qquad u>0,$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\omega_k\left(\frac{1}{B_n}\right) - \frac{A_n}{k_n} + \int\limits_{|x|<\tau} x\,dF_k\left(B_n\left(x + \omega_k\left(\frac{1}{B_n}\right)\right)\right)\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma(\tau),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_k\left(B_n\left(x + \omega_k\left(\frac{1}{B_n}\right)\right)\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} a^2.$$

Смысл $M(u)$, $N(u)$ и $a, \gamma(\tau)$ сохраняется прежним. Приемом, примененным при доказательстве предыдущей теоремы, легко доказывается, что два первые и последнее условия эквивалентны условиям 1° и 2° теоремы и что

$$\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\omega_k\left(\frac{1}{B_n}\right) - \frac{A_n}{k_n} + \int\limits_{|x|<\tau} x\,dF_k\left(B_n\left(x + \omega_k\left(\frac{1}{B_n}\right)\right)\right)\right\} =$$

$$= -A_n + \sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|<\tau} x\,dF_k(B_n x) + o(1).$$

Это равенство показывает, что A_n следует выбирать, как указано в условии теоремы.

7*

Тем же приемом можно доказать несколько более общую теорему:

ТЕОРЕМА 8'. *Дана последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин* $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk_n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. *Для того чтобы существовали постоянные* A_n *такие, что з. р. сумм*

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n} - A_n$$

сходятся к предельному, необходимо и достаточно, чтобы существовали неубывающие функции $M(u)$ и $N(u)$, *удовлетворяющие условиям* $M(-\infty) = N(+\infty) = 0$, $\int\limits_{-\varepsilon}^{-0} u^2\, dM(u) + \int\limits_{+0}^{\varepsilon} u^2\, dN(u) < +\infty$ *при любом конечном* $\varepsilon > 0$ *и постоянное* a *такие, что*

$$1^\circ \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{-\infty}^{u} dF_{nk}(x) = M(u) \qquad \text{для } u < 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{u}^{\infty} dF_{nk}(x) = -N(u) \qquad \text{для } u > 0,$$

$$2^\circ \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x) - \Big(\int\limits_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \Big)^2 \right\} = a^2.$$

При выполнении этих условий постоянные A_n *можно взять равными*

$$A_n = \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x) - \gamma(\tau) + o(1),$$

где $\gamma(t)$ *и* $\tau > 0$ — *любые постоянные, лишь бы* $-\tau$ *и* $+\tau$ *были соответственно точками непрерывности функций* $M(u)$ *и* $N(u)$. *Предельный закон дается формулой П. Леви (4) § 1 с только что определенными функциями* $M(u)$, $N(u)$ *и постоянными* a, τ *и* $\gamma(\tau)$.

Примечание. Доказанные теоремы 5—8' дают, понятно, не только необходимые и достаточные условия существования предельного закона для сумм, но также и условия сходимости к заданному предельному закону. Для этого нужно только считать, что функции $M(u)$ и $N(u)$ $(G(u))$ и постоянные a и $\gamma(\tau)$ (γ) уже известны.

§ 4. Условия сходимости к закону Пуассона

ТЕОРЕМА 9. *Для того чтобы з. р. сумм*

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n} \tag{1}$$

независимых предельно пренебрегаемых случайных величин сходились к закону Пуассона *

$$P(x) = \sum_{0 \leqslant k < x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad \lambda > 0, \tag{2}$$

* Предварительное сообщение об этой теореме было уже мною сделано (4), и настоящая работа была подготовлена к печати, когда я узнал, что те же, в сущности, условия были найдены J. Marzinkiewicz'ем в статье «Sur les fonctions indépendantes», Fund. math. t. 30 (1938), 354.

необходимо и достаточно, чтобы при каждом ε $(0 < \varepsilon < 1)$ *выполнялись условия*

$$1^\circ \quad \sum_{k=0}^{k_n} \int_{R_\varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1|<\varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda,$$

$$3^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$4^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x) - \Big(\int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x) \Big)^2 \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где R_ε *получается из прямой путем выбрасывания областей* $|x| < \varepsilon$ *и* $|x-1| < \varepsilon$.

Доказательство. Для закона Пуассона (2) х. ф. дается выражением

$$p(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Следовательно, в формуле П. Леви (4) § 1 для закона Пуассона нужно положить (при $\tau < 1$)

$$a = 0, \quad \gamma(\tau) = 0, \quad M(u) \equiv 0, \quad N(u) = 0 \qquad \text{для } u < 1$$

и

$$N(u) = \lambda \qquad \text{для } u > 1.$$

В силу теоремы 7 для сходимости з. р. сумм (1) к закону Пуассона необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$3^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1|<\varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda,$$

$$4^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{1+\varepsilon}^{\infty} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$5^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$6^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x) - \Big(\int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x) \Big)^2 \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

при любом ε $(1 > \varepsilon > 0)$. Ясно без вычислений, что эти условия эквивалентны условиям теоремы *.

Предположим теперь, что з. р. величин x_{nk} имеют конечные вторые моменты. Точнее, предположим, что

$$Ex_{nk}=0, \ \sum_{k=1}^{k_n} Ex_{nk}^2=1, \ \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} Ex_{nk}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3}$$

В этих условиях имеет место теорема, вполне аналогичная теореме о сходимости к закону Гаусса (см. теорему 12 настоящей работы) в условиях Линдеберга.

ТЕОРЕМА 10. *Для того чтобы з. р. сумм*

$$s_n = x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nk_n} \tag{4}$$

независимых в каждой серии случайных величин, удовлетворяющих условиям (3), *сходились к закону Пуассона* $P(x+1)$, *где*

$$P(x)=\sum_{0\leqslant k<x} e^{-1}\cdot\frac{1}{k!},$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x-1|>\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Только что сформулированную теорему легко получить из общей теоремы 9; мы дадим для нее независимое доказательство, основанное на теореме Г. М. Бавли (см. § 2 настоящей работы, случай 2° теоремы 4). Для закона $P(x+1)$ х. ф. равна

$$p(t)=e^{-it+(e^{it}-1)}.$$

Согласно теореме Бавли для сходимости з. р. сумм (4) к закону $P(x+1)$ необходимо и достаточно, чтобы равномерно в каждом конечном интервале t

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1)\,dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} -it+(e^{it}-1). \tag{5}$$

Обозначим

$$G_n(x)=\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{x} u^2\,dF_{nk}(u), \quad G(x)=\begin{cases}0 & \text{для } x<1\\ 1 & \text{для } x>1,\end{cases}$$

---

* Пользуясь случаем, замечу, что в необходимые и достаточные условия сходимости з. р. сумм к закону Пуассона $P(x)=\sum_{0\leqslant k<x}\frac{e^{-1}}{k!}$, приведенные в моем предварительном сообщении ([4]), вкрались две опечатки:

напечатано: 3) $\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x-1|<\varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$ вместо $\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x-1|<\varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$,

напечатано: 5) $\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<1-\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ вместо $\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<1-\varepsilon} (x-\omega_{nk}(1))^2 dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

тогда очевидно, что (5) можно записать в следующей эквивалентной форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} dG_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} dG(x). \qquad (6)$$

Так как полные вариации функций $G_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $G(x)$ равны, то в силу теоремы 2 для того, чтобы имело место соотношение (6) необходимо и достаточно, чтобы

$$G_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G(x)$$

в каждой точке непрерывности функции $G(x)$. Для этого же, как легко видеть, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$

$$G_n(1-\varepsilon) + 1 - G_n(1+\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

т. е. чтобы при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1|>\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

§ 5. Условия сходимости к закону Гаусса

Мы начнем этот параграф с доказательства теоремы А. Я. Хинчина, выясняющей принципиальное значение закона Гаусса в теории предельных законов [(18), § 11].

ТЕОРЕМА ХИНЧИНА. *Если з. р. сумм*

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nk_n}$$

независимых в каждой серии, пренебрегаемых в пределе случайных величин x_{nk} $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ сходятся к предельному закону, то соотношение

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} dF_{nk}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad (1)$$

выполняемое при любом $\varepsilon > 0$, является необходимым и достаточным условием для того, чтобы предельный закон был законом Гаусса.

Доказательство. Так как по предположению предельный закон существует, то на основании теоремы 7 мы имеем:

1° $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{u} dF_{nk}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M(u)$ для $u < 0$;

2° $\sum_{k=1}^{k_n} - \int_{u}^{\infty} dF_{nk}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} N(u)$ для $u > 0$

в точках непрерывности функций $M(u)$ и $N(u)$;

3° $\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} = a^2;$

4° $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma(\tau).$

Заметим, что для закона Гаусса

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\gamma)^2}{2\sigma^2}}dx$$

х. ф. равна $\varphi(t)=e^{-\sigma^2t^2/2+i\gamma t}$ и для него в формуле П. Леви (4) § 1 нужно положить $M(u)=N(u)\equiv 0$, $a=\sigma$ и $\gamma(\tau)=\gamma$. Отсюда в силу предельных равенств 1° и 2° мы заключаем, что если (1) выполнено, то $M(u)=N(-u)\equiv 0$, и, следовательно, предельный закон будет законом Гаусса. Обратно, если нам известно, что предельный закон является законом Гаусса, то мы имеем $M(u)=N(-u)\equiv 0$, и следовательно, в силу 1° и 2° имеем также соотношение (1). Как показал А. Я. Хинчин, условие (1) выражает, так сказать, усиленную пренебрегаемость величин x_{nk}. Именно оно означает, что не только $P\{|x_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ для каждого x_{nk} $(1\leqslant k\leqslant k_n)$ в отдельности, но что вероятность выполнения неравенства $|x_{nk}|\geqslant\varepsilon$ хотя бы для одного x_{nk} $(1\leqslant k\leqslant k_n)$ при $n\to\infty$ стремится к нулю [(18), стр. 83 и 84].

ТЕОРЕМА 11. *Для того чтобы з. р. сумм*

$$s_n=x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nk_n}$$

сходились к закону Гаусса

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz \tag{2}$$

и слагаемые x_{nk} были пренебрегаемы в пределе, необходимо и достаточно, чтобы условия

1° $\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$

2° $\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon}x\,dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$

3° $\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\,dF_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon}x\,dF_{nk}(x)\right)^2\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

выполнялись для каждого $\varepsilon>0$.

Доказательство. Так как для предельного з. р. в формуле (4) § 1 нужно положить $M(u)=N(-u)\equiv 0$, $a=1$, $\gamma=0$, то теорема 7 дает условия этой теоремы без вычислений.

Примечание. Для симметричных з. р. $F_{nk}(x)$ условия теоремы 11 сводятся к двум следующим:

1° $\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$

2° $\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon}x^2\,dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$

В качестве следствия теоремы 8 мы приведем теорему В. Феллера [W. Feller ([11])].

Теорема Феллера *. Для того чтобы для данной последовательности

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

независимых случайных величин можно было подобрать такие действительные постоянные $B_n > 0$ и A_n, чтобы з. р. сумм

$$s_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{B_n} - A_n \tag{3}$$

сходились к закону Гаусса (2) и слагаемые $x_{nk} = \frac{x_k}{B_n}$ были пренебрегаемы в пределе, необходимо и достаточно существование такой последовательности постоянных C_n, что

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| \geqslant C_n} dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\frac{1}{C_n^2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \int\limits_{|x|<C_n} x^2\, dF_k(x) - \left(\int\limits_{|x|<C_n} x\, dF_k(x) \right)^2 \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Доказательство. В силу теоремы 8 условия, необходимые и достаточные для сходимости з. р. сумм к закону (2), могут быть записаны следующим образом: при любом $\varepsilon > 0$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| > \varepsilon B_n} dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{B_n^2} \left\{ \int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} x^2\, dF_k(x) - \left(\int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} x\, dF_k(x) \right)^2 \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Очевидно, что мы можем подобрать такую последовательность

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

что

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| > \varepsilon_n B_n} dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{B_n^2} \left\{ \int\limits_{|x|<\varepsilon_n B_n} x^2\, dF_k(x) - \left(\int\limits_{|x|<\varepsilon_n B_n} x\, dF_k(x) \right)^2 \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Легко видеть, что условия (4) и (5) эквивалентны. Для завершения доказательства теоремы достаточно положить $C_n = \varepsilon_n B_n$.

---

* Достаточность условий этой теоремы для сходимости законов распределения сумм (3) при подходящем подборе A_n и B_n к закону Гаусса была указана С. Н. Бернштейном еще в 1927 г. в статье «Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes», Math. Ann., 97, стр. 12.

ТЕОРЕМА 12. *Если величины x_{nk} центрированы медианами (т. е. если $F_{nk}(-0) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F_{nk}(+0)$), то условия*

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы существовали такие постоянные A_n $(-\infty < A_n < +\infty)$, что з. р. сумм

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

сходятся к закону Гаусса, и слагаемые x_{nk} были пренебрегаемы в пределе.

Эта теорема является простым следствием теоремы 11, двух следующих лемм 4 и 5, доказанных А. Я. Хинчиным ([18]), и леммы 3.

Лемма 4. Если последовательность з. р. $\{F_n^*(x)\}$ сходится к закону Гаусса $\Phi(x)$, то последовательность законов $F_n(x)$ * сходится к закону $\Phi(x\sqrt{2})$.

Лемма 5. Для того чтобы при каждом $\varepsilon > 0$

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} a^2$$

необходимо и достаточно, чтобы при каждом $\varepsilon > 0$

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} dF_{nk}^*(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}^*(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2a^2.$$

Из теоремы 12 непосредственно вытекает теорема Феллера в формулировке, которую ей придал А. Я. Хинчин ([18]).

Теорема Феллера. Для того чтобы для данной последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

независимых случайных величин можно было подобрать такие действительные постоянные $B_n > 0$ и A_n, чтобы з. р. сумм

$$s_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{B_n} - A_n$$

---

* В этой лемме и в следующей считается, что законы $F_n(x)$ и $\overline{F_n(x)}$ уже центрированы медианой.

сходились к закону Гаусса (2) и слагаемые $x_{nk}=\frac{x_k-m_k}{B_n}$ были пренебрегаемы в пределе, необходимо и достаточно существование последовательности постоянных $C_n>0$ такой, что

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\geqslant C_n} dF_k(x+m_k)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_n^2}\int\limits_{|x|<C_n} dF_k(x+m_k)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty.$$

Здесь m_k являются медианами величин x_k, т. е.

$$F_k(m_k-0)\leqslant\frac{1}{2}\leqslant F_k(m_k+0).$$

Предположим теперь, что з. р. величин x_{nk} имеют конечные вторые моменты. Точнее, предположим, что

$$Ex_{nk}=0,\quad \sum_{k=1}^{k_n}Ex_{nk}^2=1,\ \max_{1\leqslant k\leqslant k_n}Ex_{nk}^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \tag{6}$$

ТЕОРЕМА 13. *Для того чтобы з. р. сумм*

$$s_n=x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nk_n} \tag{7}$$

независимых случайных величин, удовлетворяющих условиям (6), *сходились к закону Гаусса* (2), *необходимо и достаточно, чтобы при каждом* $\varepsilon>0$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \tag{8}$$

Доказательство. На основании теоремы 7 для сходимости з. р. сумм (7) к закону Гаусса необходимо и достаточно, чтобы при каждом $\varepsilon>0$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|>\varepsilon} dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

Третье из этих соотношений благодаря второму из условий (6) дает как раз условие теоремы. Теперь остается показать, что остальные два соотношения являются следствиями (6) и (8). Это достигается почти тривиальными оценками

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|>\varepsilon} dF_{nk}(x)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x)=o(1),$$

$$\left|\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|>\varepsilon} x\,dF_{nk}(x)\right|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x)=o(1).$$

Примечание. Теорема 10 показывает, что условие (8) Линдеберга для сходимости з. р. сумм (7) к закону Гаусса является в некотором смысле предельным. В самом деле, рассуждениями, подобными тем, которые были проведены при доказательстве теоремы 10, можно доказать, что для сходимости з. р. сумм (7) к закону

$$P^{(\alpha)}(\sqrt{\alpha}\,x+1),$$

где $P(x)$ — з. р. Пуассона с дисперсией единица, т. е. к закону, х. ф. которого равна

$$\varphi_\alpha(t)=e^{\alpha\left(i\frac{t}{\sqrt{\alpha}}+\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{\alpha}}}-1\right)\right)},$$

необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon>0$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{\left|x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right|>\varepsilon}x^2\,dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \qquad (9)$$

Ясно, что условие (8) может быть получено из (9) путем предельного перехода при $\alpha\to\infty$.

В качестве простого следствия теоремы 13 мы приведем доказанную В. Феллером (11) теорему Лапласа-Ляпунова в условиях Линдеберга.

Теорема Лапласа-Ляпунова. Если независимые случайные величины последовательности

$$x_1,\quad x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

удовлетворяют условиям

$$Ex_k=0,\quad Ex_k^2<+\infty\qquad (k=1,2,3,\ldots),$$

то для сходимости з. р. сумм

$$s_n=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{B_n},$$

где $B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}Ex_k^2$, к закону Гаусса и предельной пренебрегаемости слагаемы $\frac{x_k}{B_n}$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon>0$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{B_n^2}\int\limits_{|x|>\varepsilon B_n}x^2\,dF_k(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

§ 6. Относительная устойчивость сумм

Для последовательности

$$x_1,\quad x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

положительных независимых случайных величин А. Я. Хинчиным (16) было введено понятие об относительной устойчивости сумм. Именно, суммы $s_n=x_1+x_2+\ldots+x_n$ называются относительно устой-

чивыми, если можно найти такие постоянные числа $B_n > 0$, что при любом $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{s_n}{B_n} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Это понятие непосредственно переносится на схему Колмогорова.

Определение. Суммы

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

независимых (для $1 \leqslant k \leqslant k_n$) положительных случайных величин называются относительно устойчивыми, если при любом $\varepsilon > 0$

$$P\{|s_n - 1| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Понятно, что понятие об относительной устойчивости имеет место также для отрицательных случайных величин.

ТЕОРЕМА 14. *Для того чтобы суммы*

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

для данной последовательности серий x_{nk} $(1 \leqslant k \leqslant k_n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ *независимых, неотрицательных случайных величин были относительно устойчивы и величины* x_{nk} *были пренебрегаемы в пределе, необходимо и достаточно, чтобы при каждом* $\varepsilon > 0$

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x| < \varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Доказательство. Предельный закон распределения $\varepsilon(x-1)$ имеет х. ф., равную e^{it}; для него в формуле П. Леви нужно положить

$$M(u) = N(-u) \equiv 0, \quad a = 0, \quad \gamma = 1.$$

Очевидно, что для доказательства теоремы достаточно показать, что в наших условиях третье соотношение теоремы 7 является следствием двух первых. Этот факт ясен из неравенства

$$\sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int\limits_0^\varepsilon x^2\, dF_{nk}(x) - \left(\int\limits_0^\varepsilon x\, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \leqslant \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_0^\varepsilon x^2\, dF_{nk}(x) <$$

$$< \varepsilon \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_0^\varepsilon x\, dF_{nk}(x) = \varepsilon(1 + o(1)).$$

Из только что доказанной теоремы немедленно вытекает следующая теорема, доказанная А. А. Бобровым (2).

Теорема Боброва. Для того чтобы для последовательности

$$x_1, \quad x_2, \ \ldots, \ x_n, \ \ldots$$

положительных независимых случайных величин суммы

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

были относительно устойчивы и слагаемые $\frac{x_k}{B_n}$ $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ были пренебрегаемы в пределе, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность положительных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ такая, что

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x > C_n} {}^{\prime}F_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{0}^{C_n} x\, dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Доказательство. Действительно, для этого случая условия теоремы 12 переписываются в виде

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} dF_k(B_n x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{0}^{\varepsilon} x\, dF_k(B_n x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

или, что то же самое, в виде

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\varepsilon B_n}^{\infty} dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{B_n} \int\limits_{0}^{\varepsilon B_n} x\, dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Так как эти условия выполняются при любых $\varepsilon > 0$, то мы можем подобрать такую последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots, \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0)$, что для этой последовательности выполняются условия

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\varepsilon_n B_n}^{\infty} dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{B_n} \int\limits_{0}^{\varepsilon_n B_n} x\, dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Для получения условий теоремы остается положить $C_n = \varepsilon_n B_n$.

Предположим теперь, что з. р. положительных случайных величин x_{nk} имеет конечные первые моменты. Точнее, предположим, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} Ex_{nk} = 1, \qquad \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} Ex_{nk} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{1}$$

ТЕОРЕМА 15. *Для того чтобы суммы*

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

независимых положительных случайных величин, удовлетворяющих условиям (1), *были относительно устойчивы и слагаемые* x_{nk} $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$

предельно пренебрегаемы, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{\varepsilon}^{\infty} x\, dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Доказательство. Эта теорема получается как простое следствие теоремы 14. Действительно, второе условие теоремы 14 вместе с первым условием (1) дают условие нашей теоремы; первое же условие теоремы 14 является следствием условия настоящей теоремы. В самом деле

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{\varepsilon}^{\infty} x\, dF_{nk}(x) \geqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{k_n} \int_{\varepsilon}^{\infty} dF_{nk}(x),$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{\varepsilon}^{\infty} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

В качестве следствия этой теоремы мы получим теорему 16, данную А. Я. Хинчиным в устной беседе без доказательства.

ТЕОРЕМА 16 *. *Если положительные независимые случайные величины*

$$x_1, \quad x_2, \ \ldots, \ x_n, \ \ldots$$

имеют конечные математические ожидания

$$a_k = \int_0^{\infty} x\, dF_k(x), \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

то необходимым и достаточным условием для относительной устойчивости сумм $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ *с коэффициентами* A_n *и предельной пренебрегаемости величин* $\frac{x_k}{A_n}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ *является выполнение соотношения*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{A_n} \int_{A_n \varepsilon}^{\infty} x\, dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Еще весной 1936 г. А. Я. Хинчин в устных беседах неоднократно указывал на далеко идущую аналогию в условиях сходимости законов распределения сумм независимых предельно пренебрегаемых слагаемых к закону Гаусса и для относительной устойчивости сумм. Эту аналогию легко усмотреть из сравнения теорем 12 и 14, теоремы Феллера

---

* После того как доказательство этой теоремы было мной получено только что изложенным методом, совместно А. А. Бобров и я нашли для нее иное доказательство, вполне аналогичное доказательству В. Феллера необходимости и достаточности условия Линдеберга для применимости теоремы Лапласа-Ляпунова.

в формулировке А. Я. Хинчина и теоремы А. А. Боброва, теорем 13 и 15, теоремы Лапласа-Ляпунова и теоремы 16. Д. А. Райкову удалось оформить замеченную А. Я. Хинчиным аналогию в прекрасную теорему ([13]). Эту теорему применительно к схеме А. Н. Колмогорова я привожу ниже.

ТЕОРЕМА 17_1. Для того чтобы з. р. сумм

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n} - A_n$$

данной последовательности серий

$$x_{n1}, \quad x_{n2}, \ldots, x_{nk_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

независимых в каждой серии случайных величин, центрированных медианами, сходились при подходящем подборе постоянных A_n к закону Гаусса, необходимо и достаточно, чтобы суммы

$$\sigma_n = x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + \ldots + x_{nk_n}^2$$

квадратов этих случайных величин были относительно устойчивы.

ТЕОРЕМА 17_2. Для того чтобы з. р. сумм

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

данной последовательности серий

$$x_{n1}, \quad x_{n2}, \ldots, x_{nk_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

независимых в каждой серии случайных величин, удовлетворяющих условиям

$$Ex_{nk} = 0, \quad \sum_{k=1}^{k_n} Ex_{nk}^2 = 1, \quad \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} Ex_{nk}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

сходились к закону Гаусса, необходимо и достаточно, чтобы суммы

$$\sigma_n = x_{n1}^2 + x_{n2}^2 + \ldots + x_{nk_n}^2$$

квадратов этих случайных величин были относительно устойчивы.

Доказательство. Доказательство этих теорем получается в нескольких словах путем сравнения условий теорем 12 и 14, 13 и 15 соответственно. Этим методом Д. А. Райков и получил первоначально свою теорему.

Прежде всего найдем з. р. величин x^2, если з. р. случайной величины x есть $F(x)$. Мы имеем

$$\Phi(y) = P\{x^2 < y\} = P\{|x| < \sqrt{y}\} =$$
$$= P\{x < \sqrt{y}\} - P\{|x| > -\sqrt{y}\} = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}).$$

Теперь очевидно, что

1° $$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|>\varepsilon} dF_{nk}(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{x>\varepsilon} d\{F_{nk}(x) - F_{nk}(-x)\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{k_n} \int_{y>\varepsilon^2} d\{F_{nk}(\sqrt{y}) - F_{nk}(-\sqrt{y})\} = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{y>\varepsilon^2} d\Phi(y);$$

2° $$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_0^{\varepsilon} x^2\, d\{F_{nk}(x) - F_{nk}(-x)\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{k_n} \int_0^{\varepsilon^2} y\, d\{F_{nk}(\sqrt{y}) - F_{nk}(-\sqrt{y})\} = \sum_{k=1}^{k_n} \int_0^{\varepsilon^2} y\, d\Phi_{nk}(y);$$

3° $$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^2\, dF_{nk}(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{\varepsilon^2}^{\infty} y\, d\Phi_{nk}(y).$$

Равенства 1° и 2° показывают, что условия теоремы 12 для величин x_{nk} и условия теоремы 14 для величин x_{nk}^2 либо одновременно выполняются либо одновременно не выполняются. Равенство 3° показывает то же для теорем 13 и 15. А это и доказывает теоремы $17_1 - 17_2$.

§ 7. Закон больших чисел

Про последовательность

$$x_1, \quad x_2, \ \ldots, \ x_n, \ldots$$

независимых случайных величин говорят, что она подчиняется закону больших чисел, если для данной последовательности постоянных $B_n > 0$ можно подыскать такие действительные A_n, что при любом $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{B_n} - A_n\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Для схемы А. Н. Колмогорова мы скажем, что последовательность серий

$$x_{n1}, \quad x_{n2}, \ \ldots, \ x_{nk_n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

независимых в каждой серии случайных величин подчиняется закону больших чисел, если при любом $\varepsilon > 0$

$$P\{|x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Для дальнейшего нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 6. Для того чтобы последовательность з. р. $F_n(x)$, центрированных медианами $\left[F_n(-0) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F_n(+0)\right]$, сходилась к единичному закону

$$F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x < 0, \\ 1 & \text{для } x > 0, \end{cases}$$

необходимо и достаточно, чтобы к единичному закону сходились симметризованные законы

$$F_n^*(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon(x).$$

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна. Докажем его достаточность. Согласно предположению, при любом $\delta > 0$ и каждом $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших n

$$F_n^*(\varepsilon) > 1 - \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad 0 \leqslant F_n^*(-\varepsilon) \leqslant \frac{\delta}{2}$$

имеем (x_1 и x_2 независимы с з. р. $F_n(x)$)

$$\delta \geqslant \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} dF_n^*(x) = P\{|x_1 - x_2| \geqslant \varepsilon\} = P\{x_1 - x_2 \geqslant \varepsilon\} + \\ + P\{x_1 - x_2 \leqslant -\varepsilon\} \geqslant P\{x_1 \geqslant \varepsilon, x_2 \leqslant 0\} + \\ + P\{x_1 \leqslant -\varepsilon, x_2 \geqslant 0\} \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} dF_n(x),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 7. Если существуют действительные постоянные A_n такие, что при каждом $\varepsilon > 0$

$$P\{|x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n} - A_n| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

слагаемые x_{nk} независимы и имеют нуль медианой $\left[F_{nk}(-0) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \leqslant F_{nk}(+0)\right]$, то величины x_{nk} пренебрегаемы в пределе.

Доказательство. Очевидно, что

$$P\{|\overset{*}{x}_{n1} + \overset{*}{x}_{n2} + \ldots + \overset{*}{x}_{nk_n}| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

т. е. что равномерно относительно t в любом конечном интервале

$$\prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}^*(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

и, следовательно, равномерно относительно k $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ и t $(|t| \leqslant T)$

$$f_{nk}^*(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Отсюда в силу леммы 6 мы заключаем, что величины x_{nk} пренебрегаемы в пределе.

Примечание. Только что проведенное доказательство дает возможность сформулировать следующее предложение: если последовательность серий независимых случайных величин x_{nk} такова, что при каждом $\varepsilon > 0$

$$P\{|x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то существуют такие постоянные числа b_{nk}, что равномерно относительно k $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ при любом $\varepsilon > 0$

$$P\{|x_{nk} - b_{nk}| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

ТЕОРЕМА 18. *Для того чтобы при любом* $\varepsilon > 0$

$$P\{|x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nk_n}|\geqslant\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

и слагаемые x_{nk} *были предельно пренебрегаемы*, необходимо и достаточно, чтобы при каждом* $\varepsilon > 0$ *выполнялись условия*

1° $\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$

2° $\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|<\varepsilon}x\,dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$

3° $\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int\limits_{|x|<\varepsilon}x^2\,dF_{nk}(x)-\Big(\int\limits_{|x|<\varepsilon}x\,dF_{nk}(x)\Big)^2\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$

Доказательство. Очевидно, что доказательство сводится к выяснению условий, при которых з. р. сумм

$$s_n=x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nk_n}$$

сходятся к закону $\varepsilon(x)$ ($=0$ для $x<0$, $=1$ для $x>0$). Для закона $\varepsilon(x)$ в формуле (4) § 1 нужно положить $M(u)=N(-u)\equiv0$, $a=\gamma(\tau)=0$.

Теорема 18 является очевидным следствием теоремы 7.

ТЕОРЕМА 19. *Если* x_{nk} *имеют медианы при* $x=0$, *то для того чтобы можно было подыскать такие постоянные* A_n, *что*

$$P\{|x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nk_n}-A_n|\geqslant\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

необходимо и достаточно, чтобы при каждом $\varepsilon>0$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int\limits_{|x|<\varepsilon}x^2\,dF_{nk}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Доказательство. В силу леммы 7 слагаемые x_{nk} пренебрегаемы в пределе. Для симметричных законов $F_{nk}(x)$ условия настоящей теоремы совпадают с условиями теоремы 18. Общий случай является простым следствием леммы 5 и леммы 7.

Из теоремы 19 в качестве следствия мы получаем теорему Колмогорова-Феллера. А. Н. Колмогоров еще в 1928 г. опубликовал (5) доказательство этой теоремы в предположении $B_n=n$. Феллер в 1937 г. (12) дал новое доказательство, не ограничивая при этом выбора коэффициентов B_n.

Теорема Колмогорова-Феллера. Для того чтобы для данных последовательности постоянных B_n и последовательности

* См. примечание к лемме 7.

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ случайных величин можно было найти последовательность постоянных A_n $(-\infty < A_n < +\infty)$ таких, что

$$P\left\{\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{B_n}-A_n\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$

$$1^\circ \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\geqslant \varepsilon B_n} dF_k(x+m_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$2^\circ \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|<\varepsilon B_n} x^2\, dF_k(x+m_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Здесь m_k — медианы величин x_k.

Примечание. Заметим, что в условиях теорем Колмогорова-Феллера и 19 можно ограничиться $\varepsilon = 1$.

ТЕОРЕМА 20. *Для того чтобы данная последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ независимых случайных величин удовлетворяла при любом $\varepsilon > 0$ условию*

$$P\left\{\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$

$$1^\circ \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon n} dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$2^\circ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \int\limits_{|x|<\varepsilon n} x\, dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$3^\circ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}\left\{\int\limits_{|x|<\varepsilon n} x^2\, dF_k(x) - \left(\int\limits_{|x|<\varepsilon n} x\, dF_k(x)\right)^2\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Доказательство. Докажем прежде всего, что если условие (1) выполнено, то величины $\frac{x_k}{n}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ пренебрегаемы в пределе. Очевидно, что для этого достаточно показать, что из (1) следует при любом $\varepsilon > 0$ соотношение

$$P\left\{\left|\frac{x_n}{n}\right| > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{2}$$

Действительно из очевидного равенства

$$\frac{x_k}{n} = \frac{k}{n} \cdot \frac{x_k}{k} \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

мы заключаем, что если k с ростом n само растет до бесконечности, то в силу (2) $\frac{x_k}{k}$ и, следовательно, тем более $\frac{k}{n} \cdot \frac{x_k}{k}$ пренебрегаемо в пределе; если k остается с ростом n ограниченным, то тогда очевидно, что

$$P\left\{\left|\frac{x_k}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Предположим, что (2) неверно, тогда существует такое $\varepsilon > 0$ и такая последовательность $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, что для некоторого $\alpha > 0$

$$P\left\{\left|\frac{x_{n_k}}{n_k}\right| \geqslant \varepsilon\right\} \geqslant \alpha \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

По предположению мы имеем

$$P\left\{\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n_k-1}}{n_k - 1}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} < \eta_{n_k-1},$$

$$P\left\{\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n_k}}{n_k}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} < \eta_{n_k}, \tag{3}$$

где η_{n_k-1} и η_{n_k} сколь угодно малы при достаточно большом k. Но мы имеем с вероятностью большей чем $\alpha(1 - \eta_{n_k-1})$ неравенство

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n_k-1}}{n_k} + \frac{x_{n_k}}{n_k}\right| \geqslant \left|\frac{x_{n_k}}{n_k}\right| - \frac{n_k - 1}{n_k}\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n_k-1}}{n_k - 1}\right| \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon - \frac{n_k - 1}{n_k} \cdot \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\varepsilon}{2},$$

противоречащее (3). Требуемое доказано.

Доказательство самой теоремы немедленно получается теперь из теоремы 18.

Теорема 20 позволяет немедленно получить необходимые и достаточные условия для применимости закона больших чисел к последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ независимых случайных величин в классической формулировке. Эти условия были получены А. Н. Колмогоровым ([5]). Предполагается, что все величины x_k имеют конечные математические ожидания; для простоты мы будем считать, что $Ex_1 = Ex_2 = \ldots = Ex_n = \ldots = 0$. Это предположение, конечно, не ограничивает результаты. В классической формулировке закона больших чисел суммы $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ центрируются математическими ожиданиями $\left(A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Ex_k\right)$ и нормирующие коэффициенты выбираются равными n $(B_n = n)$.

Теорема Колмогорова. Если независимые случайные величины последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ имеют математические ожидания и $Ex_k = 0$ $(k \geqslant 1)$, то для того чтобы при любом $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

необходимо и достаточно выполнение условий

1° $\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| \geqslant n} dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$

2° $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| < n} x\, dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$

3° $\frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| < n} x^2\, dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Доказательство. Согласно условию теоремы при любом $\varepsilon > 0$

$$\int_{|x|<\varepsilon n} x\,dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_k(x) = 0 \quad (k \geqslant 1).$$

Отсюда мы заключаем, что также

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{|x|<\varepsilon n} x\,dF_k(x)\Big)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом условия теоремы 20 для рассматриваемого случая принимают следующий вид: при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon n} dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\int_{|x|<\varepsilon n} x\,dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\int_{|x|<\varepsilon n} x^2\,dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Нам остается обнаружить, что можно ограничиться этими условиями при $\varepsilon = 1$. Для этого достаточно показать, что из условий теоремы вытекают соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\int_{\varepsilon n<|x|<n} dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\\
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\int_{\varepsilon n<|x|<n} x\,dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\\
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\int_{\varepsilon n<|x|<n} x^2\,dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

при любом $\varepsilon > 0$ (если $\varepsilon > 1$, то область интегрирования нужно заменить на $n < |x| < \varepsilon n$). Первое соотношение для $\varepsilon > 1$, а последнее для $\varepsilon < 1$ тривиальны. При $\varepsilon < 1$ последнее соотношение нам дает

$$o(1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\int_{\varepsilon n<|x|<n} x^2\,dF_k(x) \geqslant \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n}\int_{\varepsilon n<|x|<n} dF_k(x).$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\varepsilon n<|x|<n} dF_k(x) = o(1).$$

Очевидно, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\int_{\varepsilon n<|x|<n} x\,dF_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\int_{\varepsilon n<|x|<n} |x|\,dF_k(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{\varepsilon n<|x|<n} dF_k(x).$$

Аналогичным способом проверяются соотношения (4) для $\varepsilon > 1$, только в этом случае исходным соотношением является первое из них.

Математический институт Московского гос. университета.

Поступило 27.XII.1938.

ЛИТЕРАТУРА

1 Бавли Г. М., Über einige Verallgemeinerungen der Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Матем. сб. 1 (43): 6, (1936), 917—930.

2 Бобров А. А., Об относительной устойчивости сумм положительных случайных величин, ДАН, т. 15, № 5 (1937), 239—240.

3 Гливенко В. И., Интеграл Стильтьеса, М. 1936.

4 Гнеденко Б. В., О сходимости законов распределения сумм независимых слагаемых, ДАН, т. 18, № 4—5 (1938), 231—234.

5 Колмогоров А. Н., Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen, Math. Ann., B. 99 (1928), 309—319; Bemerkungen zu meiner Arbeit «Über die Summen zufälliger Grössen», ibid., B. 102 (1929), 484—488.

6 Lévy P., Calcul des probabilités, Paris 1925.

7 Lévy P., Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires independantes ou enchaînées, Journ. de Math., t. XIV, (1935), 347—402.

8 Lévy P., Determination général des lois limites, C. R., Paris, t. 203 (1936), 698—700.

9 Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris 1937.

10 Lévy P. и Хинчин А. Я., Sur les lois stables, C. R., Paris, t. 202 (1936), 374—376.

11 Feller W., Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr. I, B. 40 (1935), 521—559; II, B. 42 (1937).

12 Feller W., Über das Gesetz der Grossen Zahlen, Acta litterarum ac scientiarum, t. 8, fasc. 4 (1937), 191—201.

13 Райков Д. А., О связи между центральным предельным законом теории вероятностей и законом больших чисел, Изв. Ак. Наук СССР, Серия матем., № 3 (1938), 323—338.

14 Хинчин А. Я., Sul dominio di attrazione della legge di Gauss, Giornale d. Istituto Italiano degli Attuari, v. 6 (1935), 378—393.

15 Хинчин А. Я., Zur Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze, Матем. сб. 2 (44): 1, (1937), 79—119.

16 Хинчин А. Я., Su una legge dei grandi numeri generalizzata, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, v. 7 (1936), 365—377.

17 Хинчин А. Я., Новый вывод формулы P. Lévy, Бюлл. Моск. гос. ун-та, секция А, т. I, в. 1 (1937), 1—5.

18 Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М. 1938.

B. GNEDENKO. TO THE THEORY OF LIMITING THEOREMS FOR SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

SUMMARY

Consider a sequence of series

$$x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (1)$$

of independent in each series random variables neglectable in the limit. Under this last condition we mean that for any $\varepsilon > 0$

$$P\{|x_{nk}| > \varepsilon\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

uniformly in k $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$. Denote the distribution law of the variable x_{nk} by $F_{nk}(x)$. For the characteristic function of the law $F_{nk}(x)$ we introduce the denotation

$$f_{nk}(t) = \rho_{nk}(t)\, e^{i\omega_{nk}(t)},$$

where $\rho_{nk}(t)$ and $\omega_{nk}(t)$ are real functions such that $0 \leqslant \rho_{nk}(t) \leqslant 1$, $|\omega_{nk}(t)| \leqslant \pi$, $\rho_{nk}(0) = 1$, $\omega_{nk}(0) = 0$. Since the variables x_{nk} are neglectable in the limit, we have uniformly in k $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ and t in any finite interval of t

$$\rho_{nk}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1, \quad \omega_{nk}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

The random variable x is called infinitely divisible, if for any natural n we can represent it as a sum of n independent variables with one and the same distribution law. In order that the random variable x should be infinitely divisible, it is necessary and sufficient that the logarithm of its characteristic function should be representable by P. Lévy's formula:

$$\log \varphi(t) = i\gamma(\tau)\, t - \frac{a^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{-\tau} (e^{itu} - 1)\, dM(u) + \int_{\tau}^{\infty} (e^{itu} - 1)\, dN(u) +$$

$$+ \int_{-\tau}^{-0} (e^{itu} - 1 - itu)\, dM(u) + \int_{+0}^{+\tau} (e^{itu} - 1 - itu)\, dN(u). \qquad (2)$$

In this formula $M(u)$ and $N(u)$ are non-decreasing functions satisfying the conditions 1) $M(-\infty) = N(+\infty) = 0$ and 2) $\int_{-\varepsilon}^{-0} u^2\, dM(u) + \int_{+0}^{+\varepsilon} u^2\, dN(u) < +\infty$ for every finite $\varepsilon > 0$, and τ, $\gamma(\tau)$ and a are constants. The constant τ may be chosen arbitrarily under the one condition that $-\tau$ and $+\tau$ are points of continuity of the functions $M(u)$ and $N(u)$ respectively.

We proceed now to the formulation of some of the theorems proved in the present paper.

THEOREM 3. *In order that a sequence of infinitely divisible laws $\Phi_n(x)$ should converge to a limiting law $\Phi(x)$, it is necessary and sufficient that*

1) *in every point of continuity of the functions $M(u)$ and $N(u)$*

$$M_n(u) \xrightarrow[n \to \infty]{} M(u) \quad \text{for } u < 0,$$
$$N_n(u) \xrightarrow[n \to \infty]{} N(u) \quad \text{for } u > 0;$$

2) *for any τ, for which $-\tau$ and $+\tau$ are points of continuity of the functions $M(u)$, $N(u)$, $M_n(u)$ and $N_n(u)$,*

$$\gamma_n(\tau) \xrightarrow[n \to \infty]{} \gamma(\tau), \text{ and}$$

3) *for every $\varepsilon > 0$*

$$\int_{-\varepsilon}^{-0} u^2\, dM_n(u) + a_n^2 + \int_{+0}^{+\varepsilon} u^2\, dN_n(u) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_{-\varepsilon}^{-0} u^2\, dM(u) + a^2 + \int_{+0}^{+\varepsilon} u^2\, dN(u).$$

The functions $M(u)$, $N(u)$, $M_n(u)$, $N_n(u)$ *and the constants* a, $\gamma(\tau)$, a_n, $\gamma_n(\tau)$ *are determined by formula* (2) *for the laws* $\Phi(x)$ *and* $\Phi_n(x)$.

THEOREM 4'. *In order that the sequence of distribution laws of the sums*

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n} \tag{3}$$

of independent in each series, neglectable in the limit random variables should converge for $n \to \infty$ *to a limiting law, it is necessary and sufficient that the infinitely divisible laws* $\Phi_n(x)$ *defined by means of the logarithms of their characteristic functions*

$$\lg \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ i\omega_{nk}(1)\, t + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1)\, dF_{nk}\big(u + \omega_{nk}(1)\big) \right\}, \tag{4}$$

should converge to a limiting law. The limiting laws for both sequences coincide.

As a consequence of theorem 4' we may point out the following result due to A. Khintchine ([15]).

Khintchine's Theorem. The class of limiting laws for sums (3) of independent, neglectable in the limit random variables coincides with the class of infinitely divisible laws.

THEOREM 7. *For the convergence of distribution laws of the sums*

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

of independent in each series random variables neglectable in the limit it is necessary and sufficient that there should exist such non-decreasing functions $M(u)$ *and* $N(u)$ *satisfying the conditions:* $M(-\infty) = N(+\infty) = 0$ *and*

$$\int_{-\varepsilon}^{-0} u^2\, dM(u) + \int_{+0}^{+\varepsilon} u^2\, dN(u) < +\infty \quad \textit{for any } \varepsilon > 0,$$

and such constants $a > 0$, τ, $\gamma(\tau)$, *where* $-\tau$ *and* $+\tau$ *are points of continuity of the functions* $M(u)$ *and* $N(u)$ *respectively, that*

1° $$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{u} dF_{nk}(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} M(u) \quad \textit{for} \quad u < 0,$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} - \int_{u}^{\infty} dF_{nk}(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} N(u) \quad \textit{for} \quad u > 0$$

at points of continuity of the functions $M(u)$ *and* $N(u)$,

2° $$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\tau} x\, dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma(\tau), \quad \textit{and}$$

3° $$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x) - \Big(\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \Big)^2 \right\} = a^2.$$

The logarithm of the characteristic function of the limiting law is given

by P. Lévy's formula (2) *with the functions* $M(u)$, $N(u)$ *and the constants* a, $\gamma(\tau)$ *just defined.*

Remark. It is plain that the theorem just formulated gives not only the necessary and sufficient conditions for the existence of the limiting law, but also the conditions for the convergence to a given limiting law. We have only to consider the functions $M(u)$ and $N(x)$, and the constants a and $\gamma(t)$ as given.

On the base of Theorems 3, 4′ and 7 I develop a general method for proving limiting theorems for sums of independent variables neglectable in the limit. The idea of this method consists in the following. We replace the sums

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

of, generally speaking, arbitrary random variables by the sums

$$s'_n = x'_{n1} + x'_{n2} + \ldots + x'_{nk_n}$$

of infinitely divisible random variables the distribution laws of which are determined by formula (4).

In the way of illustration of how the method just described is to be applied we confine ourselves to proving the law of great numbers and deducing the necessary and sufficient conditions for the convergence of the distribution laws of sums to Gauss' and Poisson's laws.

THEOREM 9*. *In order that the distribution laws of sums* (3) *of independent in each series, neglectable in the limit, variables should converge for* $n \to \infty$ *to Poisson's law*

$$P(x) = \sum_{0 \leqslant k < x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad (\lambda > 0), \tag{5}$$

it is necessary and sufficient that for every $0 < \varepsilon < 1$ *the following conditions should be satisfied:*

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{R_\varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1|<\varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda,$$

$$3^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$4^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x) - \Big(\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x) \Big)^2 \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

where the domain of integration R_ε *is the infinite interval* $-\infty < x < \infty$ *with the exception of the domains* $|x| < \varepsilon$ *and* $|x-1| < \varepsilon$.

---

[1] A preliminary communication on this theorem has been already published [Gnedenko (4)]. When the present paper was ready for print I learned that essentially the same conditions were found by J. Marzinkiewicz in his paper «Sur les fonctions indépendantes», Fund. Math., vol. 30 (1938), 354.

Proof. The conditions of the present theorem are easily deducible from Theorem 7. To do this it suffices to observe that for the law (5) we have to put in P. Lévy's formula $M(u) \equiv 0$, $N(u) = 0$ for $u < 1$, $N(u) = \lambda$ for $u \geqslant 1$ and $a = \gamma(\tau) = 0$.

THEOREM 10. *In order that the distribution law of the sums*

$$s_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}$$

of independent in each series variables satisfying the conditions (3) § 4 *should converge to Poisson's law* $P(x+1)$, *where*

$$P(x) = \sum_{0 \leqslant k < x} e^{-1} \frac{1}{k!},$$

it is necessary and sufficient that the condition

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1| > \varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

should be fulfiled for every $\varepsilon > 0$.

THEOREM 11. *In order that the distribution laws of the sums* (3) *of independent in each series variables should converge to Gauss' law*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \qquad (6)$$

and the variables x_{nk} $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ *should be neglactable in the limit, it is necessary and sufficient that the following conditions should be satisfied for every* $\varepsilon > 0$:

1° $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$

2° $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| < \varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$

3° $\sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x| < \varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x| < \varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1.$

Proof. Since for the law (6) we have to put in formula (2) $M(u) \equiv N(u) \equiv 0$, $a = 1$, $\gamma(\tau) = 0$, theorem 7 gives the conditions of the present theorem without any calculations.

The theorem just proved is an easy generalisation of a well known theorem of W. Feller ([11]).

Following A. Khintchine ([16]) we introduce the following

Definition. The sums (3) of independent in each series positive random variables are called relatively stable, if for every $\varepsilon > 0$

$$P\{|s_n - 1| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

THEOREM 14. *In order that the sums* (3) *of independent in each series non-negative random variables should be relatively stable and the*

variables x_{nk} $(1 \leqslant k \leqslant k_n)$ *neglectable in the limit, it is necessary and sufficient that for every* $\varepsilon > 0$

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{\varepsilon}^{\infty} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

$$2^\circ \cdot \sum_{k=1}^{k_n} \int_{0}^{\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1.$$

The theorem just formulated is an easy generalisation of a theorem due to A. Bobroff (²).

The last section of the present paper contains a number of theorems on the law of great numbers. We give here one of these theorems, which is a generalisation of theorems due to A. Kolmogoroff (⁵) and W. Feller (¹²).

THEOREM 19. *If the variables* x_{nk} *are independent for* $1 \leqslant k \leqslant k_n$ *and possess for* $x=0$ *medians* $\left(F_{nk}(-0) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F_{nk}(+0)\right)$, *then, in order that we could find such constants* A_n *that*

$$P\{|x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n} - A_n| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

it is necessary and sufficient that for every $\varepsilon > 0$

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} dF_{nk}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| < \varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

The present paper was ready for print already in the autumn of 1937; later it was slightly improved upon, mainly in the way of literary corrections.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1939
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая — Série mathématique

В. Я. АРСЕНИН

О ПРОЕКЦИЯХ B-МНОЖЕСТВ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье дается обобщение теоремы о проекции униформных B-множеств на случай множеств, пересекаемых всякой параллелью по конгруенту одного из множеств некоторого счетного семейства.

Известно, что ортогональная проекция на ось OX плоского B-множества E, расположенного в плоскости XOY и униформного относительно оси OX, есть B-множество. П. С. Новиков предложил мне ряд вопросов, касающихся обобщения этой теоремы. В настоящей работе дается решение некоторых из них.

Так как всякие два множества, каждое из которых состоит из одной точки, являются взаимно конгруентными, то обобщением этой теоремы является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Проекция плоского B-множества, расположенного в единичном квадрате и такого, что всякая параллель к оси OY пересекает его по взаимно конгруентным множествам, есть всегда B-множество.*

Доказательство. Пусть E есть плоское B-множество, имеющее отмеченное свойство, и пусть e есть линейное B-множество, конгруентное сечениям множества E прямыми $x = \text{const}$.

Множество E распадается на семейство униформных кривых, образованных образами точек множества e при конгруентном соответствии. Мы будем называть эти кривые траекториями точек множества e и будем их обозначать C_ξ, где $\xi \subset e$.

Докажем, что траектория каждой точки ξ есть B-множество. Тогда из цитированной теоремы будет следовать, что и проекция множества E является B-множеством.

Пусть

$$\xi_1, \quad \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

и

$$\eta_1, \quad \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$$

суть последовательности точек множества e такие, что

$$\left.\begin{aligned} \lim \xi_i = \sup e, \\ \lim \eta_i = \inf e, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$C_{\xi_1}, \quad C_{\xi_2}, \ldots, C_{\xi_i}, \ldots \quad \text{и} \quad C_{\eta_1}, \quad C_{\eta_2}, \ldots, C_{\eta_i}, \ldots$$

— соответствующие им траектории (фиг. 1).

Если множество e содержит $\sup e$, то полагаем

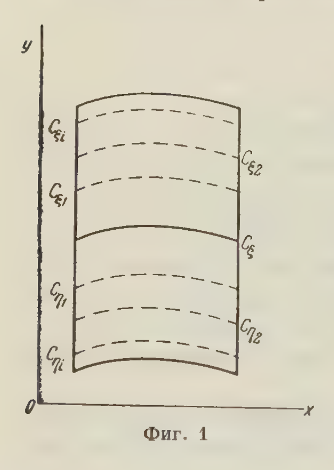
$$\xi_i = \sup e \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Если множество e содержит $\inf e$, то полагаем

$$\eta_i = \inf e \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Обозначим через Q_i множество, которое получится из множества E, если его сдвинем параллельно оси OY так, чтобы кривая C_{ξ_i} совпала с кривой C_ξ. Аналогично, обозначим через P_i множество, которое получится из множества E, если его сдвинем параллельно оси OY так, чтобы кривая C_{η_i} совпала с кривой C_ξ. Рассмотрим множество

$$C'_\xi = E \cdot P_1 \cdot Q_1 \cdot P_2 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot P_i \cdot Q_i \cdot \ldots$$



Фиг. 1

Очевидно C'_ξ есть B-множество. Мы покажем, что оно совпадает с множеством C_ξ. Из построения множеств P_i и Q_i вытекает, что каждое из них содержит множество C_ξ, следовательно,

$$C'_\xi \supset C_\xi.$$

Пусть точка $(x_0, y_0) \not\subset C_\xi$ и $x_0 \subset \Pi_x E$.

Пусть точка $(x_0, y_1) \subset C_\xi$. Тогда существует такое i, что

$$|y_1 - y_0| > \max(\sup e - \xi_i, \ \eta_i - \inf e).$$

Но тогда соответствующие множества Q_i или P_i не содержат точки (x_0, y_0) и, значит, точка $(x_0, y_0) \not\subset C'_\xi$. Следовательно, $C_\xi \supset C'_\xi$, т. е. $C_\xi = C'_\xi$. Мы доказали, что

Всякое плоское B-множество, пересекающееся параллелями к оси OY по взаимно конгруентным множествам, униформизируется посредством B-множества.

Доказанная теорема в свою очередь может быть обобщена следующим образом:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть*

$$e_1, \quad e_2, \ldots, e_n, \ldots \tag{2}$$

есть счетная система попарно не конгруентных линейных B-множеств. Пусть, далее, E есть плоское B-множество ($E \subset XOY$) такое, что всякая параллель к оси OY, его пересекающая, пересекает его по множеству, конгруентному одному из множеств системы (2). *Тогда множество E может быть униформизировано посредством B-множества.*

Доказательство. Будем предполагать, что множества системы (2) расположены на отрезке (0, 1), а множество E — внутри квадрата $0 \leqslant y \leqslant 1$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Множество E можно представить в виде

$$E = \sum E_i,$$

где множество E_i пересекается параллелями к оси OY по конгруентам множества e_i, и их проекции на ось OX попарно не пересекаются. Множество E_i распадается на систему попарно конгруентных кривых C_{ξ_i} — траекторий точек $\xi_i \subset e_i$. Докажем, что C_{ξ_i} есть всегда B-множество. Из этого будет следовать справедливость теоремы 2.

Пусть

$$\xi_i^1, \quad \xi_i^2, \ldots, \xi_i^n, \ldots$$

и

$$\eta_i^1, \quad \eta_i^2, \ldots, \eta_i^n, \ldots$$

суть счетные последовательности точек множества e_i, обладающие свойством (1) теоремы 1. Обозначим через Q_i^n множество, которое получится из множества E, если его сдвинем параллельно оси OY так, чтобы кривая $C_{\xi_i^n}$ совпала с кривой C_{ξ_i}. Аналогично, обозначим через P_i^n множество, которое получится из множества E, если его сдвинем параллельно оси OY так, чтобы кривая $C_{\eta_i^n}$ совпала с кривой C_{ξ_i}. Рассмотрим множество

$$\mathscr{E}_i = E \cdot P_i^1 \cdot Q_i^1 \cdot P_i^2 \cdot Q_i^2 \cdot \ldots \cdot P_i^n \cdot Q_i^n \cdot \ldots$$

$\mathscr{E}_i$ есть B-множество. Так же, как в случае теоремы 1, докажем, что

$$\mathscr{E}_i \cdot E_i = C_{\xi_i}.$$

Процесс получения множества $\mathscr{E}_i$ назовем процессом D. Пусть множества E_{i_k} $(k = 1, 2, \ldots)$ таковы, что множества $\mathscr{E}_i \cdot E_{i_k}$ не пусты и каждое из множеств e_{i_k} конгруентно части $e_i^{i_k}$ множества e_i. Назовем **длиною** множества e_m и обозначим через $l(e_m)$ число $\sup e_m - \inf e_m$. Легко видеть, что множество $\mathscr{E}_i \cdot E_m$ может быть непустым лишь в случае, когда $l(e_i) \leqslant l(e_m)$. Действительно, пусть $l(e_i) > l(e_m)$. Какую бы точку (x_0, ξ_m) множества E_m мы ни взяли, будем иметь:

$$\sup e_m - \xi_m < \sup e_i - \xi_i \quad \text{или} \quad \xi_m - \inf e_m < \xi_i - \inf e_i.$$

Тогда существует такое n, что

$$\xi_i^n - \xi_i > \sup e_m - \xi_m \qquad \text{или} \qquad \xi_i - \eta_i^n > \xi_m - \inf e_m.$$

Но в таком случае соответствующие множества Q_i^n или P_i^n не содержат эту точку.

Аналогично этому можно показать, что множества $\mathscr{E}_i \cdot E_{i_k}$ суть униформные множества, если $l(e_i) = l(e_{i_k})$.

Для каждого i_k выберем во множестве e_i точку $\bar{\xi}_{i_k}$, не принадлежащую его части $e_i^{i_k}$. Процессом D образуем множество $\mathscr{E}_i^{i_k}$ так, чтобы $\mathscr{E}_i^{i_k} \cdot E_i = C_{\bar{\xi}_{i_k}}$. Поскольку точка $\bar{\xi}_{i_k}$ не принадлежит множеству $e_i^{i_k}$, множество $\mathscr{E}_i^{i_k} \cdot E_{i_k}$ пусто. Действительно, допустим, что множество $\mathscr{E}_i^{i_k} \cdot E_{i_k}$ не пусто. Если точка $(x_0, y_0) \subset \mathscr{E}_i^{i_k} \cdot E_{i_k}$, то

$$\sup e_{i_k} - y_0 < \sup e_i - \bar{\xi}_{i_k} \quad \text{или} \quad y_0 - \inf e_{i_k} < \bar{\xi}_{i_k} - \inf e_i.$$

Но тогда найдется такое m, что точка (x_0, y_0) не будет принадлежать соответствующим Q или P номера m, а следовательно, не будет принадлежать и множеству $\mathscr{E}_i^{i_k}$, что противоречит предположению.

Обозначим через $\overline{\mathscr{E}}_i^{i_k}$ множество, которое получится из множества $\mathscr{E}_i^{i_k}$, если его сдвинем параллельно оси OY так, чтобы кривая $C_{\xi_{i_k}}$ совпала с кривой C_{ξ_i}. Пусть

$$\overline{\mathscr{E}}_i = \mathscr{E}_i \cdot \overline{\mathscr{E}}_i^{i_1} \cdot \overline{\mathscr{E}}_i^{i_2} \cdot \ldots \cdot \overline{\mathscr{E}}_i^{i_n} \cdot \ldots$$

$\overline{\mathscr{E}}_i$ есть B-множество и содержит кривую C_{ξ_i}. Пусть E_{m_k} суть такие множества, что множества $\overline{\mathscr{E}}_i \cdot E_{m_k}$ не пусты. Тогда из построения множества $\overline{\mathscr{E}}_i$ следует, что каждое из множеств e_{m_k} содержит хотя бы одну точку ξ_{m_k} такую, что во множестве e_i нет точки ξ'_i такой, что

$$\sup e_i - \xi'_i = \sup e_{m_k} - \xi_{m_k}.$$

Для каждого m_k процессом D выделим множество $\mathscr{E}_{m_k}$ так, чтобы $\mathscr{E}_{m_k} \cdot E_{m_k} = C_{\xi_{m_k}}$. В силу указанного выбора точек ξ_{m_k} множества $\mathscr{E}_{m_k} \cdot E_i$ пусты для всех k. Обозначим через $\mathscr{E}'_{m_k}$ множество, которое получится из множества $\mathscr{E}_{m_k}$, если его сдвинем параллельно оси OY так, чтобы кривая $C_{\xi_{m_k}}$ совпала с одной из траекторий, на которые распадается множество $\overline{\mathscr{E}}_i \cdot E_{m_k}$. Пусть H_{m_k} есть пересечение множеств $\mathscr{E}'_{m_k}$ и $\overline{\mathscr{E}}_i$. Это сделано для того, чтобы избавиться от возможных лишних точек единственности. Обозначим через H'_{m_k} множество, которое получится из множества H_{m_k}, если его сдвинем параллельно оси OY так, чтобы оно расположилось внутри квадрата $2 \leqslant y \leqslant 3$; $0 \leqslant x \leqslant 1$. Пусть

$$H = \sum H'_{m_k} + \overline{\mathscr{E}}_i.$$

H есть B-множество, так как множества H'_{m_k} и $\overline{\mathscr{E}}_i$ суть B-множества. Кривая C_{ξ_i} есть множество его точек единственности, как это видно из построения множества H. Пусть N_i есть проекция множества C_{ξ_i} на ось OX. На основании теоремы Лузина о проекции точек единственности множество N_i есть CA-множество (1). Проекции множества E_i, т. е. N_i,—попарно без общих точек, в сумме они дают проекцию множества E на ось OX, т. е. некоторое A-множество.

Докажем, что множества N_i суть B-множества. Так как $\Pi_x E$ есть A-множество, то его дополнение по отношению к сегменту $(0, 1)$ есть CA-множество. Следовательно, сегмент $(0, 1)$ распадается на счетное число попарно не пересекающихся CA-множеств $N_1, N_2, \ldots, N_n, \ldots, C\Pi_x E$. Рассмотрим какое-нибудь множество N_i. Так как оно есть CA-множество, то его дополнение по отношению к сегменту $(0, 1)$ есть A-множество, а следовательно, B-множество, ибо является суммой счетного числа

CA-множеств, т. е. CA-множеством. Следовательно, множество N_i есть B-множество. Множество точек, принадлежащих «гребенке», состоящей из параллелей к оси OY, проведенных через точки множества N_i, есть также B-множество. Следовательно, его пересечение с B-множеством H, т. е. множество C_{ξ_i}, есть B-множество. Теорема доказана.

Вместе с теоремой 2 доказано, что каждое из множеств E_i есть B-множество и униформизируется посредством B-множества.

Естественно возникает вопрос, останется ли доказанное предложение справедливым в случае, если плоское B-множество пересекается параллелями к оси OY не по взаимно конгруентным, а по взаимно подобным или взаимно гомеоморфным множествам. Мы покажем, что это не так даже в том случае, когда эти пересечения взаимно подобны и взаимно гомеоморфны.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть E есть A-множество ($E \subset OX$). Тогда существует некоторое множество $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E} \subset XOY$) типа G_δ, проектирующееся в E и имеющее следующее свойство: параллели к оси OY, проходящие через точки множества E, пересекают множество $\mathcal{E}$ по взаимно гомеоморфным и подобным множествам.*

Доказательство. Будем считать, что множество E расположено в интервале $(0, 1)$ оси OX. Как известно, множество E можно рассматривать как ортогональную проекцию элементарного плоского G_δ, расположенного внутри квадрата $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; обозначим его

$$\mathcal{E}' = S'_1 \cdot S'_2 \cdot \ldots \cdot S'_n \cdot \ldots,$$

где S'_n есть сумма попарно непересекающихся прямоугольников n-го ранга таких, что каждый из них содержится только в одном прямоугольнике $n-1$-го ранга и содержит счетную последовательность попарно не пересекающихся прямоугольников $n+1$-го ранга. Кроме того, эти прямоугольники имеют следующее свойство:

Свойство F). Ортогональная проекция на ось OY последовательности прямоугольников 1-го ранга образует вполне упорядоченную в положительном направлении оси OY сходящуюся к точке $y=1$ последовательность интервалов, не имеющих попарно ни общих точек, ни общих концов. Каждая из последовательностей прямоугольников 2-го ранга, содержащихся в одном прямоугольнике 1-го ранга, обладает тем же свойством (последовательность их проекций на ось OY сходится к ординате верхней стороны содержащего ее прямоугольника 1-го ранга). То же — для каждой из последовательностей прямоугольников n-го ранга, содержащихся в одном прямоугольнике $n-1$-го ранга.

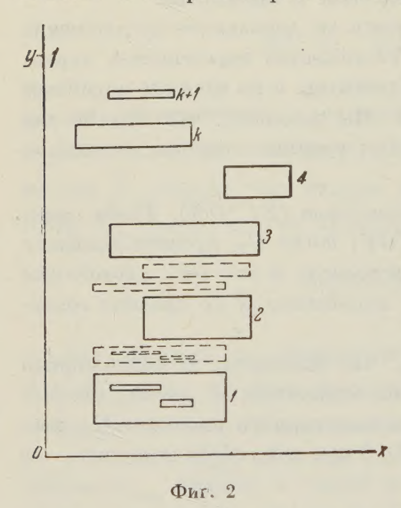
Мы предположим еще, что максимум диаметров прямоугольников ранга n стремится к нулю при возрастании n.

Преобразуем указанное выше G_δ следующим образом*.

---

* Это преобразование аналогично построению правильного решета (2).

Над самым нижним прямоугольником 1-го ранга расположим тот же прямоугольник (со всем его содержимым), сжатый в направлении оси OY так, чтобы его проекция на ось OY расположилась между проекцией самого нижнего прямоугольника 1-го ранга и проекцией следующего за самым нижним прямоугольника 1-го ранга (т. е. второго прямоугольника 1-го ранга). В полосе между вторым и третьим прямоугольниками 1-го ранга расположим первый и второй прямоугольники 1-го ранга соответственно над первым и вторым прямоугольниками того же ранга, сжатые в направлении оси OY так, чтобы их проекции на ось OY расположились между проекциями второго и третьего прямоугольников 1-го ранга первоначального G_δ, не пересекались (и не имели общих концов) ни с последними, ни между собой и т. д. Вообще, в полосе между k-ым и $k+1$-ым прямоугольниками 1-го ранга поместим k первых прямоугольников 1-го ранга первоначального G_δ соответственно над первым, вторым, ... k-ым прямоугольниками 1-го ранга первоначального G_δ, сжатые в направлении оси OY так, чтобы их проекции на ось OY разместились между проекциями k-го и $k+1$-го прямоугольников, не пересекались (и не имели общих концов) ни с последними, ни между собой и т. д. (фиг. 2 — пунктирные линии).



Фиг. 2

То же самое проделаем для прямоугольников 2-го ранга, как для тех, которые принадлежали первоначальному G_δ, так и для вновь образованных, и т. д. для всех рангов. Полученное G_δ имеет своей проекцией на ось OX множество E и обладает свойством F).

Обозначим его через $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_n \cdot \ldots,$$

где S_n есть сумма только что построенных прямоугольников n-го ранга. Отметим, что они обладают свойством F).

Пусть точки x_1 и x_2 принадлежат множеству E. Тогда параллели к оси OY, проведенные через эти точки, пересекают множество S_1 по некоторым последовательностям интервалов 1-го ранга. Выбросим из них те, которые не содержат точек множества $\mathcal{E}$. Оставшиеся интервалы образуют счетные вполне упорядоченные в положительном направлении оси OY последовательности R_1' и R_2'. Установим между этими последовательностями взаимно однозначное соответствие: i-му интервалу из последовательности R_1' поставим в соответствие i-ый интервал из последовательности R_2', считая в порядке возрастания ординаты.

Каждый из интервалов последовательностей R_1' и R_2' будет содержать счетную вполне упорядоченную в положительном направлении оси OY последовательность интервалов 2-го ранга, каждый из которых содержит точки множества $\mathcal{E}$. Между теми из этих интервалов, которые содержатся в интервалах 1-го ранга, имеющих одинаковые номера i, установим взаимно однозначное соответствие так, что k-му сегменту одной последовательности поставим в соответствие k-ый сегмент другой последовательности и т. д. для последовательностей интервалов всех рангов, всегда считая их в порядке возрастания ординаты. Таким образом между множествами R_{x_1} и R_{x_2}, по которым соответственно прямые $x=x_1$ и $x=x_2$ пересекают множество $\mathcal{E}$, будет установлено взаимно однозначное и взаимно непрерывное (т. е. гомеоморфное) соответствие, сохраняющее порядок элементов (в том смысле, что низшему из двух элементов множества R_{x_1} соответствует низший из соответствующих им элементов множества R_{x_2}).

Отметим, что первая из доказанных нами теорем немедленно распространяется на проективные множества. Всякое проективное множество одного из семейств A_n, B_n и CA_n, пересекающееся всякой параллелью к оси OY (его пересекающей) по множествам взаимно конгруентным, униформизируется посредством множества, входящего в то же семейство (соответственно A_n, B_n или CA_n).

Педагогический институт им. К. Либкнехта.
Москва.

Поступило
27. XII. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lusin N., Leçons sur les ensembles analytiques, Paris, 1930, Ch. 4.
[2] Novikoff P., Sur la séparabilité des ensembles projectifs, Fund. Math., XXV (1935).

B. ARSENIN. SUR LES PROJECTIONS DES ENSEMBLES MESURABLES *B*

RÉSUMÉ

Le but du present article est de généraliser le théorème bien connu sur la projection des ensembles mesurables B, uniformes. Nous démontrons le théorème suivant

THÉORÈME II. *Soit*

$$e_1, e_2, \dots, e_n \dots \tag{1}$$

une suite finie ou dénombrable d'ensembles linéaires, mesurables B, et E un ensemble plan de même nature qui est coupé par toute parallèle à l'axe OY en un ensemble congruent à l'un des ensembles de la suite (1). *Alors l'ensembles E peut être uniformisé au moyen d'un ensemble mesurable B.*

Par suite la projection de E sur l'axe OX est de même un ensemble mesurable B. Il est évident que le cas des ensembles uniformes mesurables B est celui, où la suite (1) se reduit à un seul ensemble, formé d'un seul point.

Nous démontrons qu'il est impossible de remplacer dans ce théorème la transformation de congruence par l'homéomorphie ou la similitude, en démontrant le

THÉORÈME III. *Tout ensemble analytique linéaire est la projection d'un ensemble plan du type* G_δ *qui est coupé par toute droite parallèle à l'axe OY suivant des ensembles qui sont deux à deux semblables et homéomorphes.*

Редактор **В. А. Толстиков** Технический редактор **Е. Шнобель**

Сдано в набор 2/III 1939 г. Подписано к печати 8/V 1939 г. Формат 70×108 см. $8^1/_4$ печ. л. 45 000 зн. в печ. л.
Уполн. Главлита А 768. Тираж 2700 экз. Зак № 565. АНИ № 1765.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный пер., 9